
CATALDI
DE LIN. RECTIS







IN DEI NOMINE.

OPVSCVLVM

DE LINEIS RECTIS ÆQVIDISTANTIBVS, ET NON AEQVIDISTANTIBVS.

Petri Antonij Cataldi.



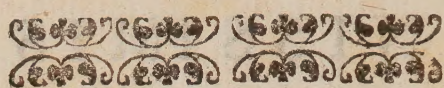
BONONIAE,
Apud Hæredes Ioannis Rossij. M.DC.III.
Superiorum permissu.

XCELLENTISSIMIS,
HVMANISSIMISQ. DD.
MATHEMATICIS,
ominis ſumma obſeruantia Colendiſsimis.
Petrus Antonius Cataldus F. P.



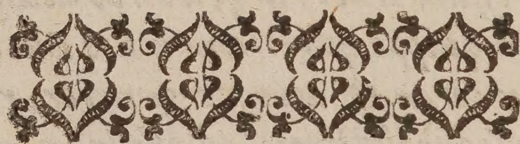
V M in præſenti Opuſculo includatur demonſtratio eius, quod in primo libro Elementorũ Euclidis, pro quinto poſtulato ponitur, quòd à quamplurimis deſideratur, atq; ideo etiam ſine ipſius adminiculo vigeſimanona Propoſitio eiuſdem primi libri oſtenſiuè demonſtretur, auſus ſum illud in lucem edens, Excel-iſsimis, atq; humaniſsimis Dominationibus veſtris, vt iam fa-dicare, vt ſi à firmo earundem iudicio iudicatum fuerit verè, d in illo proponitur concludi, ipſum dignentur patrocinio com-ti, & me inter deuotiſsimos, & humillimos ſeruos cooptare, gra mecũ agentes Omnipotenti Deo, Scientiarum omnium & Au-i, & datori, qui illam nobis perſcrutationem conceſſerit; ſin), quod optatur minus fortè repererint, non grauẽtur etiam pro bonitate, & iudicio perfectionem illam ei dare, quæ ipſi debe-me excuſantes, qui cum ſim homo, & imperfectus (licet agens ertiſsima Geometrica Scientia) facilè errare potuerim (& eo gis cum interruptè id operis cõpoſuerim inter multas angu-s, infirmitates, & rerum aliarum occupationes, quæ me multis inc annis oppreſſum tenẽt) neq; iccirco dedignentur me in gra n ſuam recipere, quippe qui etiam omnes Excellẽtiſsimas Domi-ones Veſtras ex corde, & amo, & veneror, rogoq́; D. O. M. vt, ibus mentem aſsiduè illuſtret, ad aſsiduè quoq; operandum pro Diuinæ Maieſtatis gloria, & proximi noſtri ſalute. Bononiæ Veneris 24. Ianuarij M. DC. III. *peragrante Luna gradum vi-numquartum Geminorum in Trigono ſiniſtro Martis.*

AD LECTORES





VONIAM Excell. Mathematicorum num
rus magnus eſt, & Author non niſi pauco
cognoſcit, monitum voluit ſe quadringe
ta ex his Opuſcula, Reuerendo Admodu
Patri D. Valentino Pino Canonicorum Regulariu
Sancti Seruatoris Bononiæ Priori vigilantiſſimo co
ſignauiſſe (qui præter alias virtutes innumeras, Math
maticis etiam diſciplinis excellit, quemadmodum
ipſius doctiſſimo Opere de horologiorum Solarium
brica cognoſcitur) vt ipſius Admodum Reueren-
da Paternitas illi faueat, ſingula ſingulis
Excellẽtiſsimarum Dominationum
ſuarum donandas curare, quæ
(vti ipſe Author rogat)
in ſui gratiam illas
acceptũ mit-
tent.
Valete.



DEE

IN DEI NOMINE.

OPERETTA
DELLE LINEE RETTE EQVIDISTANTI, ET NON EQVIDISTANTI.

DI

Pietro Antonio Cataldo.



IN BOLOGNA;

Presso gli Heredi di Giouanni Rossi. M. DC. III.

Con licenza de' Superiori.

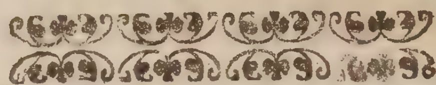
A'GLI ECCELLENTISS. ET CORTESISS. SIGNORI MATHEMATICI,

Signori sempre Colendissimi.

Pietro Antonio Cataldo.

INCLVDENDOSI *nella presente Operetta la dimostratione di quello, che nel primo libro de gli Elementi d'Euclide è posto per quinta petitione, cosa desiderata da molti; Et anco senza aiuto d'essa, essendoui dimostrata ostensiuamente la ventesimanona propositione del detto primo libro; hò nel publicarla al Mondo preso ardire d'indrizzarla, come fò, alle Eccellentissime, & amoreuolissime Signorie Vostre, acciochè se dal loro saldo giudicio sarà approuato concludersi realmente quello, che in essa si tratta, si degnino riceuerla in protettione, & hauer me per deuotissimo, & humilissimo Seruo. Ringratiando meco Iddio Omnipotentissimo, Autore, & Maestro d'ogni dottrina, dell'hauercela data. Et quādo non la trouassero tale, quale si desidera, si contentino anco con la giudiciosissima bontà loro darle quella perfettione, che se le conuiene, escusando me, che essendo huomo, & imperfetto (ancorche trattando di certissima Scienza Geometrica) hauessi facilmente errato (hauendola massime interrottamente composta fra le molte angustie, infirmità, e trauagli, che molti anni sono mi tengono di continuo oppresso) non restando perciò di ripormi nella gratia loro, come quello, che con tutto il cuore tutte anco le Signorie Vostre Eccellentissime amo, & riuerisco. Et per fine prego N. S. Dio benignissimo, che di continuo à tutti ne illustri l'intelletto ad operare anco di continuo à gloria di sua Diuina Maestà, & à salute del prossimo. Di Bologna Venerdì alli 24. di Genaro* M. DC. III. *passando la Luna per il grado vigesimoquarto de' Gemini, nel Trino sinistro di Marte.*

AI LETTORI.





ERCHE il numero de gli Eccell. Mathematici è grande, ne l'Autore hà cognitione se non di pochissimi di esi, egli fà loro sapere, che hà consegnate quattrocento di queste Operette al Molto Reu. Padre Don Valentino Pini Priore meritissimo de' Canonici Regolari di S. Saluadore di Bologna (quale, oltre all' altre molte dottrine, è anco Mathematico Eccellentissimo, come ben si conosce dalla dottisima Opera sua della Fabrica de gli Horologij Solari) accioche la Paternità sua molto Reuerenda lo fauorisca à farne donare vna à ciascuna delle loro Signorie Eccellentisime, che (come le supplica) li farà gratia di mandarla à pigliare.



DIFFINITIONE PRIMA.

La distanza da vn punto dato fuori d' vna linea retta proposta di indefinita lunghezza ad essa linea retta proposta, si dice essere la breuissima linea retta, che partendosi dal punto dato, arriui alla retta proposta.

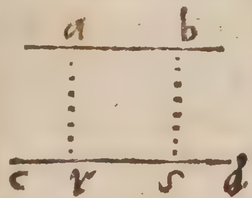


Er essempio. Sia proposta la retta a c, di indefinita lũghezza, cioè, che si posa allungare da qual si vogli parte, quanto si vogli, & sia dato il punto p. fuori d'essa retta (cioè che non sia indiretto, ò per il diritto d'essa, ò vogliamo dire in tal luogo, che allungando la linea proposta, ella non possa passare per il punto dato p.) La distanza di detto punto dato p. alla proposta retta a c, si dice, ò si chiama essere la breuissima linea, che imaginata partirsi da detto pũto dato p. arriui alla proposta retta a c, ò sua dirittura.

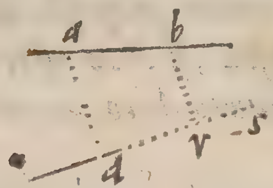
DIFFINITIONE SECONDA.

Vna linea retta data, si dice essere equidistante ad vna retta proposta nel medesmo piano, quando da dui diuersi punti, quali si voglino, presi nella data, tirando linee breuissime alla proposta, elle saranno eguali; ò vogliamo dire, quando nella data, segnati dui diuersi punti, le distanze da essi punti alla retta proposta siano eguali. Ma non equidistanti, si chiamaranno la data, & la proposta, quãdo esse distanze dette fussero ineguali. Et le due rette, data, & proposta si dicono auicinarsi, ò accostarsi insieme dalla banda, doue la distãza si trouasse minore. Et si dicono andarsi allontanãdo dalla bãda, doue la distanza si trouasse maggiore.

PEr essempio. La data a b, & la proposta c d. rette, si dicono essere equidistanti frà loro, quando nella data a b. presi, ò segnati dui diuersi punti, & siano a, & b, & da essi alla c d. proposta tirate linee breuissime (intẽdẽdosi sempre, che essa c d, alla quale si hanno da tirare le linee breuissime, sia imaginata di indefinita lũghezza, cioè, che si possa allungare da ciascuna banda, quando occorra, accioche le linee breuissime, quali andarãno dalli punti presi nella data alla dirittura d'essa proposta possano terminare in essa proposta) & siano a r, b s; elle siano eguali frà loro, cioè



che tanto sia lunga a r, quanto b s, che mostrano le distanze dalla a b, nelli dui punti diuersi a, & b, alla c d; ò vogliamo dire alla dirittura d'essa c d. Ma quando dall'a, tirata vna linea breuiss. alla c d, (intesa al lũgata quãto occorra) & sia la a d, & dal b, vna linea breuiss. alla medesma c d, & sia la b r, auẽga che la a d, & la b r, (quali mostrano le distãze nelli dui pũti diuersi a, & b, della a b, alla c d, ò sua dirittura) siano ineguali fra loro, allhora si dice esse rette a b, & c d, essere nõ equidistãti. Et delle distãze, ò breuiss. rette a d, & b r: trouãdosi più corta la b r, destra, si dice le rette a b, & c d, nõ equidistãti, auicinarsi da q̃sta bãda destra di b r, più corta, & allontanarsi dalla banda sinistra di a d, più lunga.



PROPOSITIONE PRIMA.

Se da vn punto dato ad vna linea proposta di indefinita lunghezza si tiri vna perpendicolare, essa perpendicolare sarà la più breue linea, che dal punto dato partendosi, possa arriuare alla linea proposta; ne allcun'altra retta, che dall'istesso punto dato partẽdosi arriui alla medesma detta proposta, potrà essere vguale à detta perpendicolare.

SIA dato il punto a, & proposta la retta b c; alla quale dal punto a, sia tirata la perpendicolare a r, si dice ella essere la breuissima linea, che partendosi dal punto a, possa arriuare alla retta b c; Che se ella non fusse la breuissima (per l'aduersario) saria vn'altra linea più breue di a r; hor sia a n; se possibile fusse, onde nel triangolo rettangolo a r n, essendo il lato a n, per l'aduersario più corto di a r, ancora (per la 18. del primo d'Euclide) l'angolo r, retto, opposto ad a n, saria più piccolo dell'a n r; perilche l'a n r, saria ottuso, cioè maggior di retto, ma ancora l'ãgolo estrinseco a n c, (per la 16. del primo) è maggiore dell'intrinseco oppostoli a r n, retto, però sarà ottuso anch'egli; onde essendo ciascuno delli dui a n r, & a n c, ottuso, cioè maggiore di retto; la somma loro saria maggiore di dui retti, il che è impossibile (per la 13. del primo.) Ouero se a n, p l'auersario fusse più corta di a r; ancora l'angolo r, retto saria più piccolo dell'a n r, perilche a n r, saria ottuso, ma esso a n r, gionto ad a n c, fanno quanto dui retti (per la 13. del primo) onde essendo a n r, maggior di retto, l'a n c, che è il restante fino à dui retti, saria minore di retto, & però acuto; ma



ma egli è estrinseco del triãgolo a r n; & però maggiore dell'intrinseco oppostoli r retto; onde l'ãgolo acuto saria maggior đl ret o; il che è impossibile; impossibile dunque è ancora, che alcuna retta, quale dall'a, arriui alla retta b c, possa esser più breue della ꝑpẽdicolare a r; E che alcũ'altra retta, che dall'istesso pũto dato partẽdo si, arriui alla medesma detta ꝑposta, non possa essere vguale à detta ꝑpendicolare a r, si proua così; Se per l'auersario alcun' altra poniamo la a n; potesse essere eguale alla a r; allhora nel triangolo a r n; di dui lati a r, & a n, eguali (per l'auersario) li angoli r, & n, sopra alla base (per la 5. del primo) sariano eguali fra loro, ma l'r, è retto, però anco l'n, saria retto; Et perche li dui a n r, & a n c, sono eguali à dui retti (per la 13. del primo) essendo l'vno a n r, retto, ancora l'altro a n c, saria retto, ma egli è estrinseco del triangolo rettangolo a r n; & però maggiore dell' intrinseco oppostoli r, che è retto; onde il retto sarebbe maggiore del retto (ouero l'estrinseco sarebbe eguale all'intrinseco oppostoli, essendo ciascuno d'essi retto) il che è impossibile; non è possibile dunque, che alcun' altra retta dall' a, peruenente alla b c; sia eguale, ne minore della ꝑpendicolare a r; perilche ella sarà la breuissima.

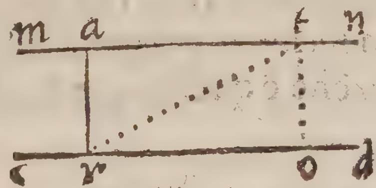
COROLLARIO.

Di quì si conosce, che quando da vn punto dato, ad vna linea proposta si tira vna perpendicolare, ella è la distanza, che si troua dal punto dato alle linea proposta.

PROPOSITIONE SECONDA.

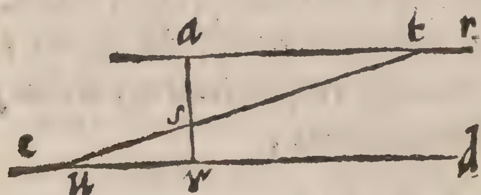
Quando due linee rette siano equidistanti fra loro, le linee, che partendosi dalla prima arriuino perpendicolarmente alla seconda, saranno anco perpendicolari à detta prima.

SIANO le due rette m n, & c d, equidistanti, & dal punto a, segnato nella prima, sia tirata a r, perpendicolare alla seconda, cioè che facci gli angoli all' r, retti. Si dice, che la istessa a r, è anco perpẽdicolare alla prima linea m n; cioè che gli angoli all' a, sono anch' essi retti. Perche se essa r a; non fusse ꝑpendicolare alla m n, ne seguiria, che dall'r, tirando vna perpendicolare alla m n, ella andasse à terminare altroue, che in a, hor vada se possibile è in t, che così a t r, & n t r, sariano angoli retti, & nel



 trian-

triangolo rettangolo r t a, che hà il lato t a, allungato in m, l'ango lo r a m, estrinseco (per la 16. del primo) saria maggiore del retto r t a, intrinseco oppostoli, & pò saria ottuso, ma li dui angoli r a m, & r a t, in somma sono eguali à dui retti, onde essendo l'vno r a m, maggiore di retto, cioè ottuso, l'altro restāte r a t, saria minore del l'altro retto, & pò acuto; pilche egli saria minore dell'angolo r t a, che è retto p l'auersario: Et considerato il triangolo rettāgolo r t a; perche l angolo r a t, acuto saria minore dell' r t a, retto; ancora il lato r t, opposto all'acuto saria minore dell' r a, opposto al retto. Hora dal pūto t, tirisi vna perpendicolare alla retta c d, & sia la t o, quale di necessità peruerrà alla c d, di quà dal punto r, cioè verso d (poiche in r, non può andare, cioè essere la istessa t r, perche allhora l'angolo t r d, saria retto, ma egli è parte dell' a r d, che è retto anc'egli, per il supposito, & gli angoli retti sono fra loro egua li per commune concessione; però la parte saria eguale al tutto, il che è impossibile. Ne fra r, & c, può andare, poniamo in u, segādo la a r, poniamo in s, pche allhora nel trian goletto s u r, essendo l'angolo u, in-trinseco retto, egli verria ad essere eguale all'angolo s r d, che anc'egli è retto, & estrinseco oppostoli, il che è impossibile (per la 16. del primo.) Et perche le due rette m n, & c d, sono equidistanti dal supposito, le due a r, & t o, perpendicolari alla c d, saranno eguali fra loro, & pche l'angolo a r d, è retto, il t r o sua parte, & però minore di lui sarà acuto, cioè minore di retto, & pò minore dell'ango lo retto t o r, onde nel triāg. t o r, rettāgolo, pche l'angolo t r o, acuto è minore del t o r, retto, ancora il lato t o (opposto all'acuto) sarà minore del lato r t (opposto al retto) pilche ancora r a, eguale al la t o, sarà minore della medesima linea r t, cioè r t, sarà maggiore di r a; ma di sopra si pruò essa r t, esser minore della istessa r a; onde la r t, saria & maggiore, & minore della r a; il che è impossibile, pò è anco impossibile quello, da che questa impossibilità si dedurria, cioè che a r, perpendicolare alla c d, non sia anco perpendicolare alla m n; gli sarà dunque perpendicolare, che è quello, che si voleua prouare.

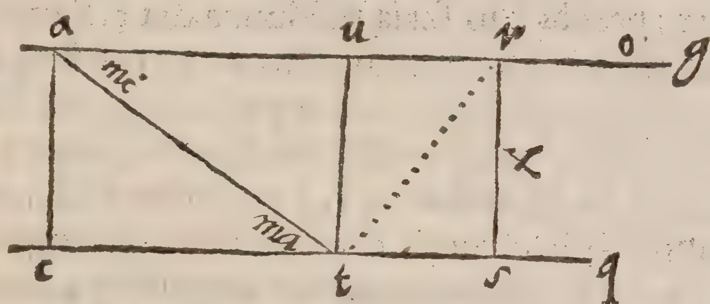


PROPOSITIONE TERZA.

Se date due linee rette equidistanti si tirino da dui diuersi punti della prima due perpendicolari alla seconda, allhora la parte del la pri-

la prima linea intrapresa fra i due termini delle perpendicolari, sarà eguale alla parte della seconda linea intrapresa fra gl'altri dui termini delle medesime perpendicolari.

SIANO le due rette equidistanti a g, & c q, & sù la prima a g, siano segnati li dui punti a, & r, dalli quali alla seconda c q, si tirino le perpẽdicolari a c, & r s, quali per la equidistanza delle linee, sarãno eguali fra loro, & faranno anco angoli retti cō la a g (per la seconda di questo.) Si dice, che anco le due a r, & c s, intraprese fra esse nelle due equidistã-ti saranno eguali l'vna all'altra; Perche se non fussero eguali, l'vna saria più lunga dell'altra, hor sia, se posSibile è, più lunga la c s, & quel più si facci rimanere da vna banda, poniamo dall' s, & sia s t, si che per l'aduersario t c, resti eguale ad a r, & tirata la a t, ciascuno delli angoli c a t, t a r, parte del retto a, sarà acuto; hora dal pũto t, alla a g, si tiri la perpendicolare t u, quale di necessità caderà fra r, & a, (che in r, nō può cadere, perche l'angolo t r a, retto, saria parte dell' s r a, retto, & à lui eguale (essendo gli angoli retti eguali fra loro) cioè la parte saria eguale al tutto, che è impossibile. Et oltre all' r, poniamo in o, non può cadere, segando la s r, poniamo in x: perche considerato il triangolo x r o, che haueria il lato r o, allungato in g l'angolo x o g, estrinseco, essendo retto, saria eguale all'angolo x r o, che è retto, & intrinseco oppostoli, il che è impossibile; Et per la medesima causa non potrà cadere in a, ne oltre all' a:) Onde perche a u, parte di a r, è minore di essa a r, saria anco minore di c t, posta dall'aduersario eguale alla a r; Et perche t u, è eguale alla c a, per la equidistanza delle linee, & essendo essa t u perpendicolare alla a g, è anco perpendicolare alla c q (per la seconda di questo) considerati li dui triangoli a u t, t c a; perche li due lati a t, t u, dell' vno sono eguali alli dui lati t a, a c, dell'altro; ma la base u a, saria minore della base c t, ancora l'angolo a t u, contenuto da detti dui lati dell vno saria minore dell'angolo t a c, contenuto da detti suoi relatiui lati dell' altro (per la 25. del primo) & perciò l' a t c, restante d'vn retto u t c, saria maggiore del t a u, restante del retto c a u. Hora tirata la t r, & cōsiderato il triangolo t a r, & anco l' a t c, che per l'aduersario il primo lato r a, del



l'vno

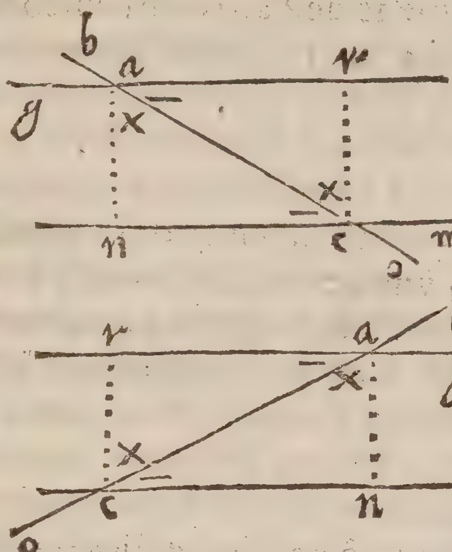
l'vno è eguale al primo lato c t, dell'altro, & il ſecondo a t, al ſecõdo t a; ma l'angolo t a r, contenuto dalli dui lati dell'vno è minore dell'angolo a t c, contenuto dalli dui lati dell'altro, ne ſegue (per la 24. del primo) che la baſe t r, ſia minore della baſe c a; cioè che la linea c a, ſia maggiore della t r, & perciò anco ciaſcuna delle due t u, & s r (eguale alla c a) ſaria maggiore della medeſma t r; Onde nel triangolo rettangolo t u r; perche t u, ſaria più lunga di t r, l'angolo t r u, parte del retto u r s, & però acuto, oppoſto ad u t più lunga, ſaria maggiore del t u r, retto, oppoſto à t r, lato più corto, cioè l'ãgolo acuto ſaria maggiore del retto, ò vogliamo dire la parte t r u ſaria maggiore del tutto, u r s, eguale al t u r, (per eſſere ciaſcuno di eſsi retto) il che è impoſsibile; Ouero conſiderato il triangolo rettangolo t s r, perche s r, ſaria più lunga di t r, l'angolo r t s acuto (che è parte del retto u t s) ſaria maggiore del t s r retto; il che è impoſsibile; Impoſsibile è dunque, che le due rette a r, & c s, poſte fra le due perpendicolari c a, & r s, ſiano ineguali fra loro, & però ſaranno eguali.

PROPOSITIONE QVARTA.

Se ſopra à due linee rette equidiſtanti cada vna retta, come ſi vogli, ſegandole ambedue; li dui angoli intrinſeci formati da vna medeſma parte gionti inſieme ſaranno eguali à dui angoli retti; Et di più l'intrinſico ſuperiore dall'vna parte ſarà eguale all'intrinſico inferiore dall'altra parte; Et ancora ciaſcuno delli eſtrinſeci ſarà eguale all' intrinſico oppoſtoli dalla medeſma parte.

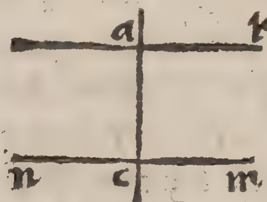
SIA che la retta a c, ſeghi le due equidiſtãti a r, & n m, in a, & c, ſi dice, che la ſomma delli dui angoli intrinſici da vna medeſima parte è vguale à dui retti, &c. Per dimoſtrarlo dal punto a, alla n m, ſi tiri la perpendicolare a n, che perciò farà ancora angoli retti con la a r, in a (per la ſeconda di queſto) & dall'altro punto c, del ſegamento, ſi tiri alla a r la perpendicolare c r, quale ſimilmente (per la ſeconda di queſto) ſarà anco perpendicolare alla n m, & perciò anco farà angoli retti con la n m; & eſſe due perpendicolari a n, & c r ſaranno eguali fra loro, per la ſuppoſta equidiſtanza delle rette a r, & n m; & di più le rette a r, & n c, intrapreſe da dette perpendicolari a n, & c r, ſarãno eguali fra loro (per la antecedente terza propoſitione:) Onde nelli dui triangoli rettangoli a r c, & c n a; li tre lati dell'vno ſono eguali alli tre lati loro corriſpondenti dell'altro

l'altro pò (per la ottaua del primo)li angoli dell'vno sarãno eguali

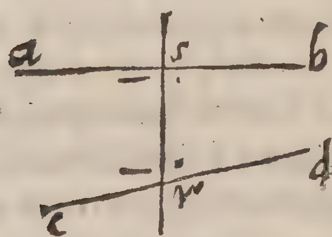


alli angoli à loro corrispondenti dell'altro, cioè r a c-, ad n c a-, & r c a, x ad n a c, x ; ma r a c, & n a c contengo no vn retto n a r, cioè sono eguali ad vn retto, però ancora r a c, & r c a saranno eguali ad vn retto : onde giuntoli l'angolo retto r c m, la sõma delli tre angoli r a c, r c a, & r c m sarà eguale à dui retti ; ma li tre angoli detti sono quanto li dui intrinsici destri r a c, & a c m (perche a c m da se è eguale alli dui a c r, & r c m sue parti, in che egli è diuiso, che lo contengono intieramente) però li dui intrinsici destri detti sono eguali à dui retti ; Et perche tutti quattro li intrinsici, cioè li dui destri, & li dui sinistri in somma sono eguali à quattro retti (per la 13. del primo d'Euclide) essendo già li dui destri eguali à dui retti, ne segue, che li dui sinistri siano anco essi eguali à dui altri retti, che è il restante delli quattro retti detti ; Ouero perche l'angolo n c a - è eguale all' r a c-, & q̃sto r a c-, insieme con l' n a c, x contẽgono vn retto r a n, ancora l'n c a- cò l'n a c,x,si eguagliarãno ad vn retto,onde giõtoli l'angolo retto n a g,la sõma(che è quãto il totale g a c,con l' n c a) cioè li due intrinsici sinistri sarà quãto dui retti.Ouero pche n c a-è eguale ad r a c,-,giontoli cõmunemente il g a c, la somma delli dui n c a,& g a c, intrinsici sinistri sarà eguale alla somma delli dui r a c, & g a c, ma questa è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però anco la somma di detti dui intrinsici sinistri sarà eguale à dui retti . Et quanto alli angoli coalterni, di già s'è dimostrato, che l'ãgolo r a c- ,ĩtrinsico destro superiore è eguale all'ãgolo n c a-, intrinsico sinistro inferiore . Quãto poi al g a c, egli è composto da vn retto, & dall'x ; ma da vn'altro retto,& da vn'altro x, è anco coperto l' m c a, però questo m c a, sarà eguale al g a c . Ouero, perche la somma di r a c, & g a c, è eguale à dui retti,& anco la somma di n c a, & m c a , è eguale à dui retti, essendo già dimostrato l'r a c, da se essere eguale all' n c a, da se, ne segue , che anco il rimanente g a c , sarà eguale al rimanente m c a ; Et che ciascuno delli estrinsici sia eguale all'angolo intrinsico oppostoli dalla medesima parte, è facile da conoscere ; poiche quãto al b a r, egli è vguale all'a c m , essendo ciascuno di essi eguale al g a c, (opposito al b a r, per il segamento

mento delle rette g r, & b c (& però à lui eguale per la 15. del primo) & coalterno all' m c a) L'istesso auuiene dell'altro estrinsico superiore g a b, nell' essere eguale all' altro intrinsico inferiore n c a, oppostoli dalla medesima parte sinistra; Et così anco l' m c o, estrinsico, ò esteriore, sarà eguale all' r a c, intrinsico, ò interiore, & l' o c n, al g a c. Et quando la a c, segãte fusse perpẽdicolare alla n m; cioè che dall'a, punto del segamẽto nella a r; tirando vna perpẽdicolare alla n m; ella arriuasse in c, cioè fusse la istessa a c; allhora la medesina a c; saria anco perpendicolare alla a r (per la seconda di questo) & perciò così li angoli all' a, come li angoli al c, tutti sariano retti; onde, & la somma delli due interiori destri, & anco la somma delli due interiori sinistri saria eguale à dui retti. Et così anco ciascuno interiore, ò vogliamo dire intrinsico superiore da vna parte, saria eguale al suo coalterno, ò vogliamo dire interiore, ò intrinsico inferiore dall'altra parte. Et similmente ciascuno delli quattro esteriori saria eguale al suo relatiuo, ò corrispondente intrinsico, ò interiore oppostoli dalla medesima parte.



Notisi, che la superiore propositione è la istessa, che la 29. del primo d'Euclide, & è dimostrata ostensiuamente, per proprij mezi, cioè senza ridurre l'aduersario all'impossibile, & non hà bisogno altrimenti del quinto postulato posto per petitione, ò primo principio, qual dice. Si domanda esserci concesso, che se vna linea retta segando due linee rette facci li angoli interiori, & da vna medesima parte, minori di dui retti, allhora le due rette allungate in infinito, esser necessario, che concorrano (cioè si congiunghino insieme, facendo angolo) da quella parte, nella quale gli angoli interiori sono minori di dui retti. Et perciò esso quinto postulato non è necessario alla sua dimostratione.



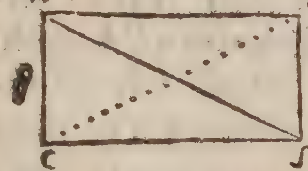
Notisi ancora, che detto quinto postulato, ò cosa in Euclide posta p petitione, ò primo principio si conosce non hauersi à pigliar p tale, poiche nõ hà le due parti necessarie alli primi principij, che sono; L'essere noto al senso, & l'essere indemostrabile; Anzi egli è demostrabile, & perciò si può, ò deue pigliare per propositione, come si vede essere fatto in questa Operetta, doue egli si dimostra nella 12. propositione, dicendo. Se due linee rette date siano segate da vna retta, & occorra, che la somma delli dui angoli intrinsici, ò voglia-

vogliamo dire interni, ò interiori da vna medesima parte sia maggiore, ò minore di dui angoli retti; Ouero che l'interno superiore da vna parte sia ineguale all' interno inferiore dall'altra parte (che sono coalterni frà loro.) Ouero, che l'esterno sia ineguale all'interno oppostoli dalla medesima parte; allhora le due rette date, saranno non equidistanti frà loro; Et più si auicinarāno dalla banda doue li dui angoli interiori giōti insieme sono minori di dui retti; O doue (che è l'istesso) l'interiore è minore dell'altro interiore à lui coalterno; O doue (che pure è l'istesso) l'interiore sia minore dell'esteriore oppostoli dalla medesima parte. Della qual propositione, quel la parte, che dice. Che quando di due rette date, segate da vn'altra retta, occorra, che li dui angoli interiori da vna medesima parte gionti insieme siano minori di dui retti; allhora le due retti date, siano non equidistanti; è (mediante la superiore quarta propositione) dimostrata, così. Le due rette date, conditionate come di sopra, non possono essere equidistanti; perche allhora (per la quarta di questo) di necessità; la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte saria eguale à dui retti; Li coalterni sariano eguali frà loro; Et l'esteriore saria eguale all'interiore oppostoli da vna medesima parte; Il che tutto è contro il supposito. Nō potendo dunque essere equidistanti frà loro, saranno non equidistanti, come si voleua dimostrare.

PROPOSITIONE QVINTA.

Se sopra ad vna retta data si tirino due perpendicolari eguali, & si congiunghino con vna retta, ella sarà equidistante, & eguale alla data oppostali, sopra alla quale stanno le due perpendicolari, quali verranno anco ad essere perpendicolari alla linea detta, che le congiunge insieme.

SOPRA c s, data, siano perpendicolari a c, & r s, & eguali, & si tiri a r; si dice, che ella sarà equidistante alla c s, & à lei eguale; Perche, se a r, non fusse equidistante à c s, li saria non equidistante, & perciò presi in l' vna d'esse a r; i dui diuersi punti a, & r; essi sariano non egualmēte distanti dalla c s; però le due perpendicolari a c, & r s, che mostrano dette distāze sariano inegua-

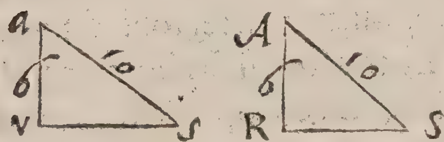


li; ma elle non possono essere ineguali (ponendosi elle dal supposito eguali) però manco la a r; non può essere nō equidistante alla c s; gli sarà dunque equidistante; & perciò (per

 la se-

la seconda di questo) ciascuna delle due a c, & r s, che è perpendicolare alla c s, sarà anco perpendicolare alla a r; & perciò l'angolo a, & anco l'angolo r, sarà retto, onde tirata c r, ouero a s, & considerati li dui triangoli rettangoli a c s, & a r s, che li dui lati c a, a s, in l'vno, sono eguali alli loro corrispondenti r s, s a, nell'altro, ne segue (per quello, che quì sotto si mostrarà) che li altri angoli dell'vno siano eguali alli altri angoli dell'altro, & il restãte lato a r, dell'vno, al restante lato c s, dell'altro, cioè la linea a r, alla c s, oppostali, come si volea dimostrare.

Quando di dui triangoli rettangoli, dui lati dell'vno, sono eguali à i dui lati loro corrispondenti dell'altro, ancora il restante lato dell'vno sarà eguale al restante lato dell'altro, & ciascuno delli altri dui angoli dell'vno sarà eguale al suo corrispondente angolo dell'altro; & l'vn triangolo all'altro.



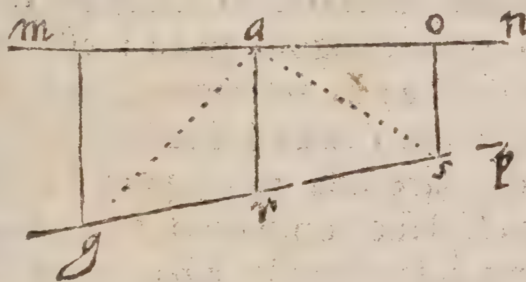
NELLI dui triangoli rettangoli a r s, & A R S, se li dui lati continẽti l'angolo retto dell'vno fussero eguali alli dui lati continenti l'angolo R, retto dell'altro, ancora (per la 4. del primo d'Euclide) il restante lato dell'vno, saria eguale al restante lato dell'altro, gli angoli à gli angoli, &c. Ma siano r a, & a s, eguali ad R A; & A S; Si dice, che anco R S, sarà eguale ad r s. Perche se non fussero eguali, l'vno saria più lungo dell'altro, hor sia per l'auuersario R S, più lungo, & si facci restare dalla parte S, quello in che eccede r s, sì che R t, douenti per l'auuersario eguale ad r s; che perciò nelli dui triang. rettãg. a r s, & A R t, essendo li dui lati a r, r s, con il suo angolo r, retto, eguali alli dui lati A R R t, con il suo angolo R, retto, ne seguiria (per la 4. del primo) che anco la base A t, fusse eguale alla base a s, & perciò saria anco eguale alla A S. (posta eguale alla a s) onde nel triangolo A t S. li dui lati A t. & A S. sariano eguali frà loro, e pciò li dui angoli A S t, & A t S, sariano eguali frà loro, ma l'A t S, esteriore del triangolo rettangolo A R t, che hà il lato R t, allungato in S. è maggiore dell' A R t, interiore retto, oppostoli, & perciò è ottuso; onde ancora l'Angolo A S t, saria ottuso. Et nel triangolo A S t, che hà il lato S t, allungato in R, l'angolo A t R, che è esteriore opposto all'A S t, interiore, saria maggiore d'esso A S t, ottuso, cioè saria ottuso anco egli, ma ancora l'angolo A t S. è ottuso, però li angoli A t R, & A t S, fatti dalla linea A t, cadente sopra alla R S, sariano ambidui

dui ottusi, ò vogliamo dire, maggiori ciascun d'essi di retto, & perciò in somma maggiori di dui retti; il che è impossibile (per la 13. del primo) non possono dunque li dui lati r s; & R S, essere inegguali fra loro, & però saranno eguali, & consequentemente l'angolo a, sarà eguale all'A, l's, all'S, & l'vn triangolo all'altro.

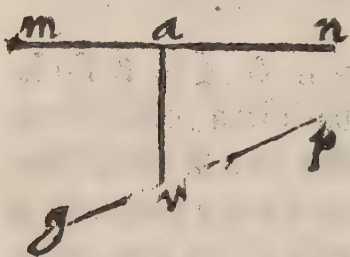
PROPOSITIONE SESTA.

Se sopra à due linee rette date non equidistanti, si tiri vna retta, che sia perpendicolare alla prima ella non potrà essere perpendicolare alla seconda, anzi con la seconda farà angolo acuto dalla parte doue le linee date si vanno accostando, & però ottuso dall'altra parte.

SIANO le due rette date non equidistanti m n, & g p, & sia la parte, dalla quale elle si vanno accostando la destra, cioè verso l'n, & p. Et tirata a r, che le seghi ambedue, ella con la m n, facci gli angoli all'a, retti. Si dice, che essa a r, con l'altra seconda g p; farà li angoli all'r, non retti, & farà acuto l'a r s, dalla banda del quale le date non equidistanti si auicinano. Perche se per l'auersario gli angoli all'r, fussero retti, prese r g, & r s, eguali, & tirate a s, & a g, & considerati li dui triangoli a r g, & a r s, che sariano rettangoli per l'aduersario, & però l'angolo r, dell'vno, eguale all'angolo r, dell'altro & li dui lati g r, r a, continenti l'angolo r, dell'vno, alli dui lati s r, r a, continenti l'angolo r, dell'altro, ne seguiria (per la 4. del primo) la base a g, douere esser' eguale alla base a s; & gli altri angoli dell'vno, à gli altri angoli à loro corrispondenti dell'altro; Onde ancora l'angolo m a g, restante del retto m a r, saria eguale all'angolo n a s, restante del retto n a r: Hora dalli punti s, & g, tirate ad n m; le perpendicolari s o, & g t, & considerati li dui triangoli rettangoli s o a, & g t a; che di più l'angolo s a o, dell'vno saria eguale all'angolo g a t, dell'altro, & il lato a s, dell'vno, al lato a g, dell'altro, ne seguiria (per la 26. del primo d'Euclide) che il restante angolo a s o, dell'vno fusse eguale al restante angolo t g a, dell'altro, il lato o a, al lato t a, & ancora il lato s o, al lato g t; ma s o, & g t, che sono perpendicolari alla m n; mostrano la distãza della g p, alla m n, nelli dui diuersi pun-

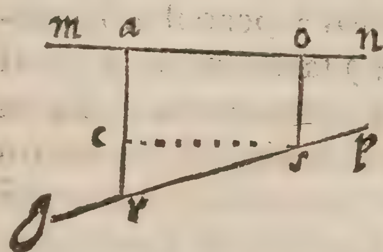


ti g, & s; & perche sariano eguali, ne seguiria, che g p; & m n; fussero equidistanti, il che è contro il supposito, & però impossibile. Onde impossibile è anco, che li angoli a r g, & a r p, siano retti; saranno dunque non retti, cioè l'vno ottuso, & l'altro acuto, come si volea prouare. Et l'acuto sarà a r p, ponendosi, che le linee m n, & g p, non equidistanti si auicinino verso n; & p; allontanandosi verso m, & g, (cioè supponendo, che g t, sia più lunga di r a; & r a, più lunga di s o, cioè che il punto g, sia più distante dalla retta m n, che non è il punto r, & il punto r, più distante dalla istessa retta m n, che il punto s.) Perche essendo più vicine le rette date dalla parte n p; che dall'altra, ne segue, che da essa parte allungate elle finalmente occorressero insieme formãdo angolo; hor poniamo mentalmente, che ciò occorresse in h, considerato dalla detta parte destra, lontano dalla a r, (perpendicolare alla m n) quanto si vogli, che così le due a h, & r h; con la a r, formariano vn triangolo a h r, del quale il lato h a, saria allungato in m, onde l'angolo m a r; esteriore d'esso triangolo sarà maggiore dell' a r h, interiore oppostoli, cioè l' a r h; sarà minore dell' m a r; ma l' m a r; è retto dal supposito (ponendosi la a r, perpendicolare alla m n) però l' a r h, minore di lui, verrà ad essere acuto, & il suo compagno a r g, sarà ottuso, come si volea prouare. Ouero del triangolo a h r, considerato il lato h r, allũgato in g, l'angolo esteriore a r g, sarà maggiore dell' r a h; interiore oppostoli, ma esso interiore è retto, però l'esteriore, cioè a r g, sarà ottuso, & consequentemente a r p, sarà acuto, che è quello dalla parte doue le date m n, & g p, non equidistanti si vanno auicinando. Et questo anco, da se (senza la prima superiore dimostratione, doue si riducea l'auersario all'impossibile) può bastare à dimostrare ostensiuamente, che la retta a r, perpendicolare alla m n; non è altramente perpendicolare alla g p; poiche si proua, che l'angolo a r p; destro è acuto, & l' a r g; sinistro è ottuso.

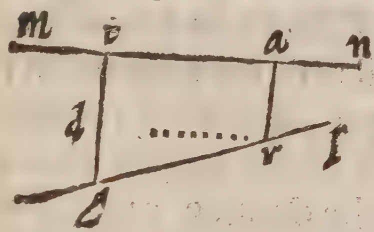


Ancora si potria da principio dimostrare la Propositione totale così. Siano le due rette date non equidistanti m n, & g p; quali più si auicinino dalla parte destra n p, & sopra ad esse sia tirata a r, quale sia perpendicolare in a, alla prima m n; Si dice ella non poter'essere perpendicolare alla seconda g p; anzi, che con essa seconda g p, farà angolo acuto dalla parte destra n p; doue le date s'auici-

s'auicinano,& ottuſo dall'altra parte,cioè ſi dice l'angolo a r p; eſſere acuto, & l' a r g, ottuſo. Et per prouarlo; Da vn' altro punto preſo nella prima m n, ò dalla parte deſtra da a, verſo n; ò dalla ſiniſtra da a, verſo m, poniamo dalla deſtra, & ſia o, alla isteſſa prima m n, ſi tiri la perpendicolare o s, di modo lunga,che arriui anco alla ſeconda g p; & ſia che vi arriui in s, che così le due



s o, & r a, perpēdicolari alla m n; moſtraranno la diſtanza dalli dui diuerſi punti r, & s, ſegnati nella g p; alla m n, quali due perpendicolari r a, & s o, ſarāno ineguali,ſupponendoſi che le due date m n, & g p, ſiano non equidiſtanti Et di più perche ſi dice elle auicinarſi dalla parte deſtra; la deſtra s o, doue la diſtanza è minore ſarà più corta della ſiniſtra a r; hora da queſta a r, più lunga, cominciando dall' a, doue fà angolo retto con la m n; ſi ſeghi la parte a c; eguale alla o s, & ſi tiri la c s; & conſiderate le due rette c a, & s o, ambedue perpendicolari alla medeſima a o, & eguali frà loro, quali ſono congiunte inſieme dalla c s, queſta c s, (per la 5. di queſto) ſarà equidiſtante, & eguale alla detta a o, & però la a c, che è perpendicolare all' vna d'eſſe equidiſtanti a o; ſarà ancora perpendicolare all' altra c s, (per la 2. di queſto) cioè l'angolo a c s, ſarà retto; & perche egli è eſteriore del triangoletto s r c, che hà il lato r c, allungato in a, egli ſarà maggiore dell'angolo c r s, interiore oppoſtoli (per la 16. del primo d'Euclide) cioè l'angolo c r s, ſarà minore dell'a c s,che è retto, però detto c r s; ſarà acuto, ma queſto è l'angolo,che fà la a r, con la g p; ſeconda delle due date non equidiſtanti, che più ſi auicinano dalla parte n p, deſtra, doue è queſt'angolo,però conoſciamo, che la a r, non è altrimēti perpendicolare alla ſeconda data g p; anzi con lei fà angolo acuto dalla parte deſtra, doue le due date ſi ſuppongono auicinarſi, ottuſo dunque ſarà l'altro a r g, ſiniſtro (per la 13. del primo) dalla qual parte ſiniſtra le due rette date non equidiſtanti ſi allontanano frà loro.



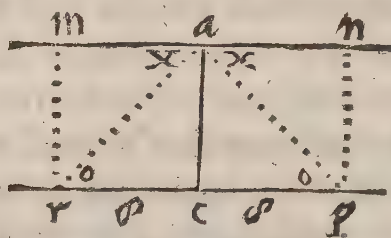
Et ſe nella prima linea m n, haueſsimo preſo il punto t, dalla parte ſiniſtra, dalla quale le due rette date m n, & g p, non equidiſtanti ſi vanno allontanando,& da eſſo punto t, alla m n, tirata la perpendicolare t g, peruenente alla g p, in g; allhora, perche queſta t g, ſaria più lunga della a r, (eſſendo le due rette date, più diſtan-

diſtanti (dal ſuppoſito) dalla parte ſiniſtra, che dalla deſtra) da eſſa t g, cominciando dal punto t, doue ella fà angolo retto con la m n, ſi ſegaria la parte t d, eguale alla a r, & tirata la r d, ella (per la 5. di queſto) ſarà equidiſtante, & eguale alla a t, perilche la a r, che è perpendicolare alla a t, ſarà ancora perpendicolare alla r d, (per la 2. di queſto) cioè l'angolo a r d, ſarà retto, onde l'a r g, che è maggiore di detto retto ſua parte, ſarà ottuſo, & però il ſuo compagno a r p. (per la 13. del primo d'Euclide) ſarà acuto. Et così conoſciamo pure, che la retta a r, eſſendo perpendicolare alla m n, non può eſſere perpẽdicolare alla g p; anzi fà angolo acuto con eſſa g p; dalla parte deſtra p, doue le due date non equidiſtanti ſi auicinano, & ottuſo dalla parte ſiniſtra g, doue elle ſi vãno allontanando, il che è quello, che ſi voleua dimoſtrare.

PROPOSITIONE SETTIMA.

Se ſopra à due rette date cada vna retta, che ſia perpendicolare ad ambedue, è neceſſario eſſe due rette date eſſer' equidiſtãti frà loro.

SOPRA m n, & r p, date cada a c, & occorra, che ciaſcuno delli angoli all'a, & al c, ſia retto, ſi dice, che m n, & r p, ſono equidiſtanti frà loro. Per dimoſtrarlo, preſa c p, & c r, eguali, dalli punti p, & r, alla m n, ſi tirino le perpendicolari p n, & r m, accioche li angoli all'm, & all'n, ſiano retti, & ſi tirino r a, & p a, & conſiderati li dui triangoli rettangoli r c a, & p c a, li dui lati r c, c a, cõ il ſuo angolo retto ſaranno eguali alli dui lati p c, c a, con il ſuo angolo retto, onde (per la 4. del primo) r a, ſarà eguale alla p a, l'angolo a r c, all'a p c, & l'r a c, al p a c, onde cauato l'r a c, dal retto m a c, & il p a c, dal retto n a c, li dui angoli rimanenti r a m, & p a n, ſaranno eguali frà loro. Et nelli dui triangoli rettangoli r m a, & p n a, perche li dui angoli m, & a, dell'vno, con il lato r a, ſono eguali alli corriſpondenti dui angoli n, & a, dell'altro con il lato p a, ne ſegue (per la 26. del primo d'Euclide) che il reſtante angolo m r a, dell'vno, ſarà eguale al reſtante angolo n p a, dell'altro; & delli lati r m, al p n; & m a, ad n a; Onde il totale angolo m r c, ſarà anco eguale al totale angolo n p c; Perche dunque r m, & p n; perpendicolari alla m n; dalli dui punti diuerſi r, & p, della linea r p; ſono eguali frà loro, ne ſegue, che la r p, ſia da ciaſcuna



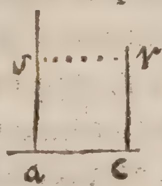
ſcuna parte egualmente lontana, & però equidiſtante alla m n, come ſi voleua prouare. Conoſciamo ancora, che per la medeſma cauſa; perche ſopra n p, & a c, cade n a, perpendicolare ad ambedue, ne ſegue, che n p, ſia equidiſtante alla a c; Et di più vediamo, che ſopra le due equidiſtanti m n, & r p, cadendo r m, & p n; perpendicolari alla m n, che elle ſaranno anco perpendicolari alla r p, & perciò che l'angolo m r p, ſarà retto, e così l'n p r.

Ouero per dimoſtrare la ſopradetta propoſitione, ſi potria dire. Se le due rette m n, & r p, non fuſſero equidiſtanti, elle ſariano non equidiſtanti, & però la retta a c, che è perpendicolare all'vna m n; non potria eſſere perpẽdicolare all'altra r p, (per la 6. di queſto) ma il ſuppoſito è, che eſſa a c, ſia anco perpẽdicolare alla r p; però non potrà a c, non eſſere perpendicolare alla r p; onde ne anco potrà eſſa r p, non eſſere equidiſtãte alla m n; gli ſarà dunque equidiſtante.

PROPOSITIONE OTTAVA.

Se ſopra ad vna retta data cadano due perpendicolari; elle ſaranno equidiſtanti frà loro.

SOPRA alla data a c, ſiano le due perpendicolari a s, & c r, ſi dice elle eſſere equidiſtanti frà loro; Per dimoſtrarlo, faccinſi eſſe due perpendicolari eguali (dalla più lunga ſegando vna parte eguale alla minore) & ſia a s, eguale alla c r, & ſi cõgiungano li punti r, & s, con la retta r s, quale (per la 5. di queſto) ſarà eguale, & equidiſtante alla a c, & li angoli r, & s, ſaranno retti, come li c, & a, (per la 4. di queſto) onde anco ciaſcuna delle due rette c a, & r s, ſarà perpendicolare à ciaſcuna delle due c r, & a s; & però ciaſcuna delle due c a, & r s, (per il corollario della prima di queſto) moſtrarà la diſtanza di c r, ad a s, nelli dui diuerſi punti c, & r, preſi nella c r; ouero moſtrarà la diſtanza di a s, alla c r, nelli dui diuerſi punti a, & s, preſi nella a s, ma eſſe c a, & r s, ſono eguali frà loro, però anco le due c r, & a s, (per la 2. diffinitione) ſono egualmente diſtanti, ò equidiſtanti frà loro, come ſi vogli dire.

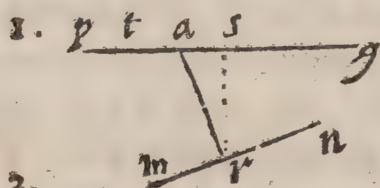


PROPOSITIONE NONA.

Se due rette date ſiano non equidiſtanti, & da vn punto ſegnato nella prima, ſi tiri vna perpendicolare alla ſeconda, & dal punto doue

doue nella seconda arriua essa perpendicolare, si tiri vna perpendicolare alla prima, quest'vltima perpendicolare sarà più corta della antecedente perpendicolare, & andarà frà la antecedente, & quella banda, doue le linee date si vanno auicinando.

SIANO le due rette date non equidistanti p g, prima, & m n, seconda, che si vanno auicinando dalla parte g n, & dal punto a, segnato nella prima sia tirata a r, perpendicolare alla seconda,



che così, essendo l'angolo a r n, retto, il g a r, sarà acuto (per la 6. di questo.) Hora dal punto r, tirando vna perpendicolare alla prima linea p g, ella andarà di necessità frà a, & g, perche sopra la istessa r a, non può andare, che allhora l'angolo r a g, saria retto, & di già sappiamo egli douere essere acuto, ne frà a, & p, può andare, perche dicendosi dall'aduersario ella poterui andare, & arriuarui, poniamo in t, & però l'angolo r t a, essere retto, ne seguiria, che considerato il triangolo rettangolo r t a, del lato t a, allungato in g, l'angolo esteriore g a r, esser maggiore dell'interiore oppostoli a t r, cioè l'acuto del retto, il che è impossibile, andarà dunque frà a, & g, (cioè dalla banda della perpendicolare r a, doue le date non equidistanti si vanno auicinando) & sia la r s, & così l'angolo r s a, sarà retto, & perciò maggiore dell's a r, acuto, onde nel triangolo rettangolo r s a, perche l'angolo a, acuto è minore dell's, retto, ancora la linea, ò lato r s, opposta all'acuto, sarà più corta della a r, opposta al retto (per la 19. del primo d'Euclide) cioè la perpendicolare r s, alla prima linea, sarà più corta della perpẽdicolare a r, alla secõda.

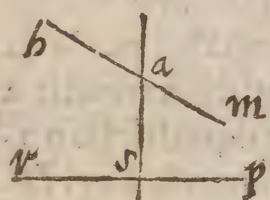
PROPOSITIONE DECIMA.

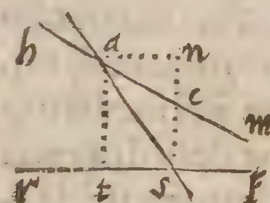
Se due linee rette date non equidistanti siano segate da vna retta, li dui angoli interiori dalla parte doue le rette date si vanno auicinando, gionti insieme, cioè la somma loro sarà minore di dui angoli retti. Et la somma delli dui angoli interiori dall'altra parte, doue le linee date si vanno allontanando sarà maggiore di dui angoli retti; Ancora l'angolo interiore dalla parte, doue le due rette date non equidistanti si vanno auicinando, sarà minore dell'interiore à lui coalterno dall'altra parte, cioè delli coalterni, minori saranno quelli, che sono dalla parte doue le date non equidistanti si vanno auicinando, & maggiori quelli dall'altra

parte

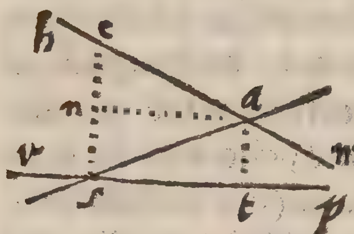
parte doue le date si vanno allontanando. Et di più ciascuno delli dui angoli interiori dalla parte doue le rette date non equidistanti si vanno auicinando, sarà minore dell' angolo esteriore à lui opposto dalla medesima parte: ma dall'altra parte doue elle si vanno allontanando auuerrà il contrario, cioè, che ciascuno delli dui angoli interiori sarà maggiore dell'esteriore oppostoli dalla detta medesima parte.

SOPRA le due rette date h m, & r p, non equidistanti, anzi più vicine dalla banda di m p, che dalla banda di h r, si tiri a s, come si vogli, segandole ambedue in a, & s. Si dice li dui angoli interiori m a s, & p s a, essere minori di dui retti; perche dal punto a, imaginando, tirata vna perpendicolare alla r p, ella, ò andarà nel punto s, cioè sarà vna istessa con la a s, ouero passarà verso la parte r, sinistra, ò verso la parte p, destra; Se andarà nel pūto s, cioè, che a s, sia perpēdicolare alla r p, ella, allhora (per la 6. di questo) con l'altra linea h m, inequidistante alla r p; farà angolo acuto dalla parte m, destra, doue esse non equidistāti si auicinano, & ottuso dalla parte h, sinistra, doue si allontanano, cioè l'angolo m a s, sarà acuto, & però gionto con il retto p s a, la somma (da questa parte destra, doue le non equidistanti si auicinano) sarà minore di dui retti; & l'angolo h a s, sarà ottuso, però gionto con il retto a s r, la somma (dalla parte sinistra, doue le non equidistanti si allontanano) sarà maggiore di dui retti. Ma se la perpendicolare alla r p, partendosi dal punto a, vi arriui in t, sinistro dall' s, allhora dal punto s, si tiri la s c, perpendicolare alla istessa r p; che essendo le date h m, & r p, non equidistāti, anzi più vicine dalla parte di m p, ne seguirà dette due perpendicolari t a, & s c, alla r p, essere ineguali, & più corta essere la s c; Hora questa s c, si allunghi sopra dal c, finche si facci eguale alla t a, & questo sia, che occorra in n, cioè, che s n, sia eguale alla t a, & tirisi la n a, quale (per la 5. di questo) sarà eguale, & equidistante alla t s, & però essendo a n, & t s, equidistanti, segate dalla retta a s; l'angolo n a s, sarà eguale al suo coalterno t s a, cioè l'interiore superiore destro all'interiore inferiore sinistro (per la 4. di questo) ma l'angolo c a s, parte dell' n a s, è minore di lui, però sarà anco minore del t s a, onde giontoli communemente l'angolo a s p; la somma delli dui



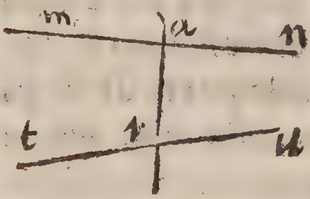


c a s, & a s p, (che ſono li dui interiori dalla parte deſtra, doue le due rette date ſi auicinano) ſarà minore della ſomma delli dui t s a, & a s p; ma queſta ſomma è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella ſarà minore di dui retti. Et conſequentemente li dui altri angoli interiori ſiniſtri h a s, & r s a, che ſono il reſtante delli deſtri, ſino à 4. retti, ſarà maggiore di dui retti. Et quando la perpendicolare alla r p, partendoſi dal punto a, vi arriui in t, deſtro dall' s, allhora dal punto s, ſi tiri la s c, perpendicolare alla isteſſa r p, che eſſendo le date h m, & r p, non equidiſtãti, anzi più vicine dalla parte di m p, ne ſeguirà dette due perpendicolari s t, & t a, alla r p, eſſere ineguali, & più lunga eſſere la s c. Hora da queſta s c, cominciando dall' s, ſi ſeghi la parte s n, eguale alla t a, & ſi tiri la a n, quale (per la 5. di queſto) ſarà eguale, & equidiſtante alla s t, perilche eſſendo queſte due equidiſtãti n a, & s t, ſegate dalla retta a s, l'angolo a s t, ſarà eguale al ſuo coalterno n a s, ma queſto n a s, è parte del c a s, & perciò minore di lui, però anco l'a s t, ſarà minore del medeſmo c a s; onde giontoli communemẽte l' m a s, la ſomma delli dui t s a, & m a s (che ſono li dui interiori deſtri delle h m, & r p, ſegate dalla a s.) ſarà minore della ſomma delli dui c a s, & m a s; ma queſta è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella ſarà minore di dui retti. Et conſequentemente la ſomma delli dui angoli interiori ſiniſtri c a s, & r s a, ſarà maggiore di dui retti.

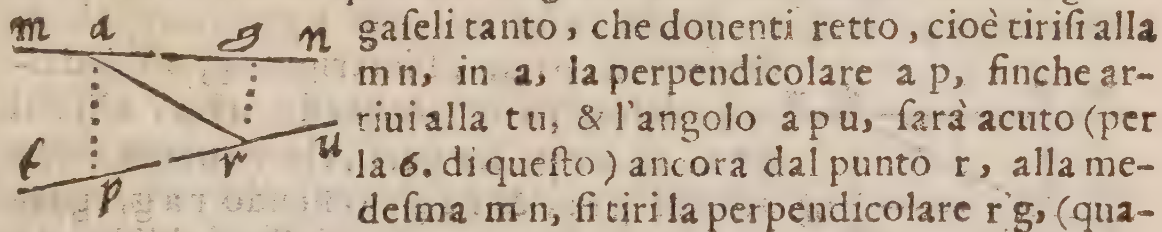


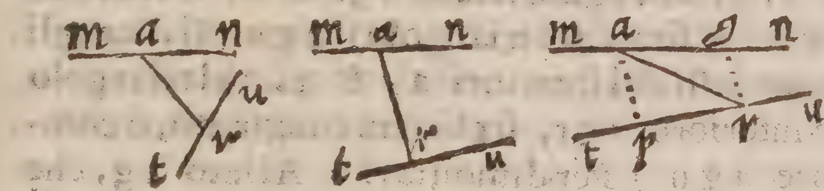
Ancora ſi può dimoſtrare queſta prima parte della preſente propoſitione nel modo, che ſegue.

Seghi a r, le due date non equidiſtanti m n, & t u, che s'accoſtano verſo n u, quale a r, con m n, dalla banda di n, ſarà angolo retto, ouero ottuſo, ouero acuto. Se retto, allhora l'altro interiore deſtro a r u, ſarà acuto (per la 6. di queſto) & perciò la ſomma di eſsi dui interiori deſtri n a r, & u r a, ſarà minore di dui retti. Se n a r, ſia ottuſo, ſeghiſene il retto n a g, tirando alla m n, in a, la perpendicolare a g, che così l' a g u (per la 6. di queſto) ſarà acuto, & dall' r, alla m n, ſi tiri la perpendicolare r p, (quale ſarà più lunga della g a) & l'angolo p r u, ſarà acuto; & perche g a, & r p, ſono perpendicolari ad m n, elle ſaranno equidiſtanti frà loro (per



ro (per la 8. di questo) onde essendo segate da a r, l'angolo p r a, sarà eguale al suo coalterno r a g, & perche la somma di p r a, & a r g, è il p r g, acuto, anco la somma di a r g, & r a g, sarà acuto, onde giontoli il retto n a g, la somma loro, con esso retto, cioè n a r, & u r a, sarà manco di dui retti; Ouero, perche sopra p r, & a g, equidistanti cade t u, l'angolo esteriore a g u, acuto, sarà eguale all'interiore oppostoli p r u; ma questo è eguale alla somma delli dui a r g, & r a g, (perche per la equidistanza delle rette p r, & a g, segate dalla a r, l'angolo r a g, è eguale al suo coalterno p r a, & questo p r a, con l'a r g, compõgono il totale angolo acuto p r g) però anco l'angolo a g u, acuto, sarà eguale alla somma delli dui a r g, & r a g; onde giontoli il retto n a g, la somma d'esso acuto con il retto, qual somma è manco di dui retti, sarà eguale alla somma di n a r, & a r u; cioè questi dui angoli interiori destri delle m n, & t u, segate dalla a r, saranno manco di dui retti. Et quando l'angolo n a r, sia acuto, allhora giongaseli tanto, che doventi retto, cioè tirisi alla m n, in a, la perpendicolare a p, finche arriui alla t u, & l'angolo a p u, sarà acuto (per la 6. di questo) ancora dal punto r, alla medesma m n, si tiri la perpendicolare r g, (quale sarà più corta della p a) & l'angolo g r u, sarà acuto; & perche esse due p a, & r g, perpendicolari alla m n, sono equidistãti frà loro (per la 8. di questo) & segate dalla a r, l'angolo g r a, sarà eguale al suo coalterno p a r, & però la somma di g r a, & g a r, sarà eguale alla somma di p a r, & r a g, cioè ad vn retto, onde giõtoli g r u, acuto, la somma delli tre g a r, a r g, & g r u, (che è quanto li dui interiori n a r, & u r a) non arriuarà, cioè sarà minore di dui retti. Ouero quando l'angolo n a r, sia acuto, allhora l'a r u, sarà acuto, ò retto, ò ottuso. Se acuto, ò retto, la somma con n a r, acuto sarà manco di dui retti. Se ottuso, seghisene il retto g r u, & dal punto a, tirisi la perpẽdicolare a p, alla t u, che perciò sarà equidistante alla r g, & l'angolo p a n, sarà acuto, come l'r g n; L'angolo p a r, sarà eguale al suo coalterno a r g, & però a r g, con g a r, saranno eguali al p a g, cioè la somma loro sarà manco d'vn retto (es-



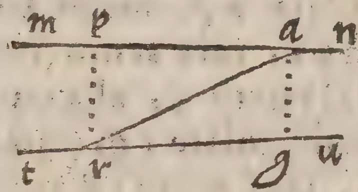


ſendo p a g, acuto) che con il g r u, retto ſaranno manco di dui retti, ma li tre detti g a r; a r g; & il retto g r u, ſono quanto li dui n a r, & a r u, (perche a r u, comprende il retto g r u, & l' a r g, come ſue parti totali) perilche ſi conoſce eſsi dui n a r, & a r u, eſſere in ſomma manco di dui retti, come ſi volea dimoſtrare. Et conſequentemente in ciaſcun modo li altri dui m a r, & t r a, interiori dalla parte doue le date non equidiſtãti ſi allontanano frà loro, ſaranno in ſomma più di dui retti.

COROLLARIO.

Di quì ſi conoſce, che quando d'vn triangolo è allungato vn lato l'angolo eſteriore, che ſi forma è eguale alla ſomma delli dui interiori nel triangolo oppoſtili.

PERCHE di ſopra nella figura quì ricopiata hauendo prouato l'angolo u g a, eſſere eguale all' u r p, (per la equidiſtanza delle rette r p, & g a, ſegate dalla u r, che u g a, è angolo eſteriore, & p r u, è l'interiore oppoſtoli dalla medeſma parte) & queſto u r p, alli dui g r a, & a r p, ſue parti, che è quanto à dire alli dui g r a, & r a g, (eſſendo r a g, eguale al ſuo coalterno a r p, delle equidiſtanti r p, & g a, ſegate dalla r a) conoſciamo, che ancora l' u g a, ſarà eguale alli medeſmi dui g r a, & r a g, che ſono li dui interiori oppoſtili nel triangolo a r g, che hà il lato r g, allungato in u.

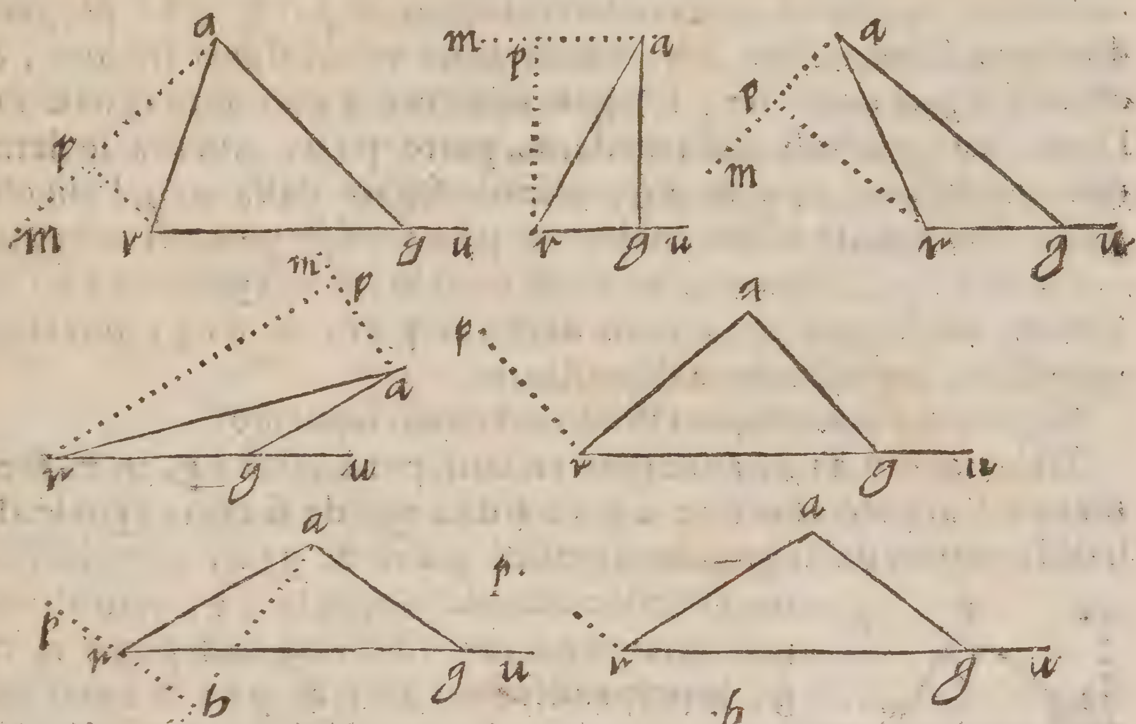


Et ancora ſi potrà dimoſtrare eſſa prima parte della ſuperiore propoſitione in altro modo, ſe prima ſi dimoſtrarà la ſeguente.

Di ciaſcun triangolo, allungando vn lato qual ſi vogli, l' angolo eſteriore ſarà eguale alla ſomma delli dui interiori nel triangolo oppoſtili.

SIA del triangolo a r g, allungato il lato r g, in u, formando l'angolo eſteriore (cioè fuori del triangolo) a g u. Si dice egli eſſere eguale alla ſomma delli dui interiori a, & r, nel triangolo oppoſtili (che l'altro interiore a g r, ſi chiama congiunto, ò compagno à detto eſteriore a g u.) Per dimoſtrarlo. Al lato a g, che fà angolo con l'allungamento g u, dalla parte ſuperiore a, verſo la banda d' r, ſi tiri la perpendicolare a m; Et dal punto r, che è l'altra eſtremità del lato allungato per g, in u, ſi tiri vna perpendi-

pendicolare alla a m, & sia la r p; Onde essendo ciascuna delle due rette r p, & g a, perpendicolari alla a m; esse due rette saranno equidistanti frà loro (per la 8. di questo) & perche elle sono



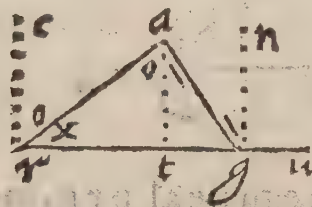
segate dalla r u, l'angolo a g u, esteriore, sarà eguale al p r g, interiore oppostoli dalla istessa parte. Et anco, perche le due equidistanti r p, & g a, sono segate dalla a r; l'angolo r a g, sarà eguale al suo coalterno p r a, onde giontoli communemente l'a r g, alla somma delli dui p r a, & a r g, & però al totale p r g, sarà eguale la somma delli dui r a g, & a r g, interiori nel triangolo, ma al medesimo angolo p r g, è eguale l'esteriore a g u, però esso a g u, sarà anco egli eguale alla somma delli detti dui interiori a, & r. Et se la perpendicolare, che dal punto a, si tirasse alla a g, fusse la a r, altro lato del triangolo g a r; cioè, che l'angolo a, interiore fusse retto; allhora dal punto r, tirata, ò imaginato essere tirata dalla parte superiore la r p, perpendicolare alla r a; pure nel medesimo modo si diria, che essendo r p, & a g, perpendicolari alla medesima a r, elle sono equidistanti frà loro, & che perciò essendo segate dalla u r, l'angolo a g u; è eguale al p r g, & anco essendo segate dalla a r; l'angolo p r a, è eguale all'a, onde tutto l'angolo p r g; & però l'a g u; sarà eguale, & all'a, & all'a r g, cioè alla somma delli dui interiori a, & r. Et se la perpendicolare, che dal punto a, si tirasse al lato a g, passasse dentro del triangolo, cioè, che l'angolo r a g, fusse ottuso; allhora ad essa

perpen-

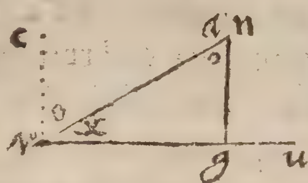
perpendicolare, paſſante dentro al triangolo, & allungata quanto occorre ſi tiri dal punto r, la perpendicolare r h, & queſta dalla parte ſuperiore, cioè da r, ſi allunghi alquanto à beneplacito, & ſia fino in p, che allhora conſiderate pure h p, & g a, perpendicolari alla medeſima a h, elle ſaranno equidiſtanti frà loro, & eſſendo ſegate dalla u r; l'angolo eſteriore a g u; ſarà eguale all'interiore oppoſtoli dalla medeſma parte p r u; Ancora le dette due equidiſtanti r p, & a g, eſſendo ſegate dalla a r; l'angolo g a r; ſarà eguale al ſuo coalterno p r a; onde giontoli communemente l'a r g, il totale p r g, & però lo, à lui eguale a g u; eſteriore ſarà eguale alla ſomma delli dui g a r, & a r g, interiori oppoſtili, come ſi voleua dimoſtrare.

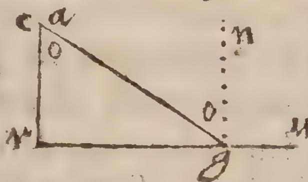
Si può anco dimoſtrare l'iſteſſo nel modo ſeguente.

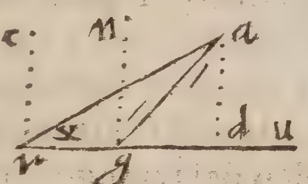
Del triãgolo a r g, allungato vn lato, poniamo l'r g, in u, formando l'angolo eſteriore a g u; ſi dice egli da ſe eſſere eguale alli dui interiori del triangolo oppoſtili g a r, & g r a; gionti inſieme; Per dimoſtrarlo; Sopra la r g, lato allungato quanto occorre, ſi tirino dalli punti r, & g, le perpendicolari r c, & g n; & anco dal punto a, ò angolo oppoſtoli, la perpendicolare a t; quale, ò caderà dentro del triangolo, ò ſul lato deſtro a g; ò ſul ſiniſtro a r, ò fuori del triangolo dalla parte deſtra, ò dalla ſiniſtra: Cada prima dentro del triangolo, sù la baſe, ò linea r g, in t. Et conſiderate le due rette a t, & r c, perpendicolari alla r t, elle ſaranno equidiſtanti frà loro; onde eſſendo ſegate dalla a r; l'angolo o, ſarà eguale all'o, ſuo coalterno; Ancora conſiderate le due g n, & t a; perpendicolari alla t g, elle ſaranno equidiſtanti frà loro, & perche ſono ſegate dalla a g; l'angolo - ſarà eguale al ſuo coalterno -, onde tutto l'angolo a, ò vogliamo dire r a g, ſarà eguale alli dui c r a, & n g a; & giuntoli communemente l'angolo x, la ſomma di tutto l'a, con l'x, cioè delli dui interiori a, & r, nel triangolo r a g; ſarà eguale alli tre c r a, a r t, & n g a; ma alli dui c r a, & a r t, che formano il retto c r t, è eguale l'n g u (ò perch'egli è retto, ò perche conſiderate le due rette r c, & g n; perpẽdicolari alla iſteſſa r g; & però equidiſtanti frà loro, ſegate dalla r u; l'angolo n g u; eſteriore è eguale al c r u, interiore oppoſtoli dalla medeſima parte) però à queſto n g u, giontoli l'a g n; & ſe ne forma il totale eſteriore a g u, la ſomma, cioè queſto a g u, è quanto li tre detti, & però quanto li dui interiori g r a, & g a r. Cada hora la perpẽdicola-

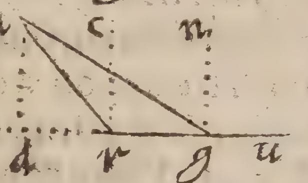


dicolare, che dal punto, ò fommità a, del triangolo (oppofta alla linea r g, d'effo allungata) arriui à detta bafe, ò linea allungata, ful lato deftro a g, cioè fia vna linea ifteffa con il lato a g, quale, perciò verrà à fare angoli retti con la r u; & farà anco vna ifteffa linea con quella, che dal punto g, fi tiraffe perpēdicolare alla r g; & perche, & quefta g a, & la r c, fono perpendicolari alla r u, elle faranno equidiftanti frà loro, & effendo fegate dalla u r, l'angolo eftrinfico, ò efteriore u g a, (che hora è retto) farà eguale all' intrinfico, ò interiore oppoftoli c r u: Et anco, perche le ifteffe equidiftanti g a, & r c, fono fegate dalla r a, l'angolo o, farà eguale all' o, fuo coalterno; perilche giontoli communemente l'angolo x, tutto il c r g, & però l'efteriore a g u, farà eguale alli dui o, & x, ò vogliamo dire g a r, & g r a, interiori nel triangolo oppofti all' u g a; Et fe dall' a, tirando vna perpendicolare alla r g, ella caderà in r, cioè fia l' ifteffo lato a r; & però quella ifteffa linea, che anco dal punto r, fi eleuaffe perpendicolarmente alla r g; allhora, perche quefta, & la g n, perpendicolare alla medefma r g, in g, faranno equidiftanti frà loro, & fegate dalla a g, l'angolo a, farà eguale all' a g n, fuo coalterno, onde giontoli communemente l' r, gli a, & r; interiori del triangolo faranno eguali all' r, & a g n; ma tanto è l' n g u, quanto l' r, però effo n g u, con l' a g n, & confequentemente tutto l efteriore a g u, da loro formato, farà eguale all' a, & r, interiori nel triangolo oppoftili, gionti infieme. Et quando dal punto a, tirādo vna perpēdicolare alla r g, ella cada fuori del triangolo, poniamo dalla parte deftra in d, sù l' allungamento g u; allhora confiderate le due rette c r, & a d, perpendicolari alla r u; & però equidiftanti frà loro, fegate dalla r a, fi dirà l'angolo c r a, effere eguale al fuo coalterno d a r, & giontoli communemente l' a r g, tutto il c r d, retto farà eguale alli dui d a r, & a r g, & però anco l' n g d, retto, eguale al c r d, farà eguale alli medefmi dui d a r, & a r g; Hora confiderate le due rette g n, & d a; perpendicolari alla r u; & però equidiftanti frà loro, fegate dalla g a, l'angolo n g a, farà eguale al fuo coalterno d a g, onde dall' n g d, retto leuando l' n g a, fua parte (& reftarà l' a g d) & dalla fomma delli dui









a r g, &

arg, & dar, leuando il dag, parte del dar, (& restarà gar, & arg) il restante da vna banda sarà eguale al restante dall'altra, cioè il solo angolo agd, che è l'estrinsico, ò esteriore del triangolo sarà eguale alli dui gar, & arg; che sono li intrinsici, ò interiori oppostili in esso triangolo. Et se la perpendicolare dall'a, tirata alla base, ò lato allungato del triangolo cada fuori del triangolo dalla parte sinistra, poniamo in d, (supposto allungata la gr, da essa parte sinistra r, quanto bisogna, acciò ella possa riceuere detta perpendicolare ad.) Considerando le due rette da, & rc, perpendicolari alla du, & però equidistanti frà loro, segate dalla ar; si vedrà l'angolo dar, essere eguale al suo coalterno cra, & gionto all'vna parte l'adr, & all'altra il crg; retti, frà loro eguali, la somma delli dui rad, & adr, sarà eguale alla somma delli dui cra, & crg; cioè al totale arg, (intrinsico nel triangolo) da loro composto; & di nuouo à ciascuna bãda gionto communemente l'angolo gar, la somma da vna banda, cioè li tre angoli adr, rad, & gar, che è quãto à dire li dui angoli adr, & gad, (perche il gad, comprende in se precise li rad, & gar,) sarà eguale alla somma dall'altra banda, cioè alli dui interiori arg, & gar, & perche all'angolo gad, è eguale l'nga, (suo coalterno nelle linee gn, & da, perpendicolari alla du, & però equidistãti frà loro segate dalla ga) & all'adr, retto è eguale l'ngu, retto, ne segue, che anco la sõma di questi dui nga, & ngu, & però il totale agu, esteriore (del triangolo) da loro formato, sia eguale alla somma delli medesimi dui arg, & gar, interiori, nel triangolo oppostili, Che è quanto occorrea dimostrare.

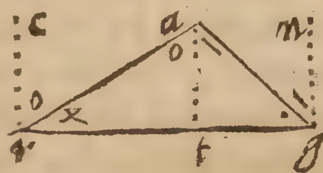
COROLLARIO.

Dalle cose dimostrate si conosce, che li tre angoli di qual si vogli triangolo gionti insieme, sono in somma quanto dui retti.

PERCHE sapendo, che l'angolo esteriore (allungato vn lato, qual si vogli) è eguale alli dui interiori oppostili; Et perche esso esteriore con l'vltimo interiore congiuntoli suo compagno è sempre in somma eguale à dui angoli retti (per la 13. del primo d'Euclide) ne segue, che ancora li dui interiori detti con esso vltimo interiore, cioè tutti tre li interiori, sono medesmamente eguali à dui angoli retti.

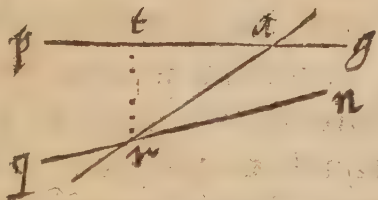
Ouero, perche (poniamo nel triangolo arg,) presa per base vn lato, ò linea d'esso sopra alla quale possa cadere dentro del triangolo vna

lo vna perpẽdicolare dall'angolo oppoſtoli, & ſia il lato r g, & dall' a, tiratali la perpẽdicolare a t, & anco dalli punti r, & g, termini d' eſſa baſe tirate ad eſſa le perpendicolari r c, & g n; perche delle due parti dell'angolo a, la t a r; è eguale all'angolo c r a, & eſſo c r a, con l' a r t, ſiniſtro interiore ſopra alla baſe del triangolo a r g, propoſto, cõpongono il retto c r t; ſappiamo, che ancora detto a r g, ſiniſtro con la parte ſiniſtra r a t, dell' angolo r a g, viene ad eſſere eguale ad vn'angolo retto; Similmẽte l'altra parte deſtra g a t, dell' angolo r a g, è eguale all'angolo n g a; & eſſo n g a, con l' a g t, deſtro interiore ſopra alla baſe del propoſto triangolo a r g; compongono il retto n g t; perilche vediamo, che ancora detto a g r, deſtro con la parte deſtra g a t, dell'angolo r a g; viene ad eſſere eguale ad vn'angolo retto, onde tutto l'angolo r a g, con li dui a r g, & a g r; cioè li tre angoli del triangolo propoſto vengono ad eſſere eguali à dui angoli retti.



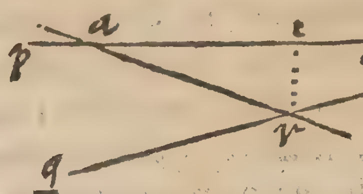
Hora p dimoſtrare la ſopradetta prima parte della decima propoſitione, mediante la ſuperiore, ſi potrà dire.

SEGHI a r, le due rette date non equidiſtãti p g, & q n; che ſi accoſtano dalla parte deſtra g n; Si dice, che la ſomma delli dui angoli interiori deſtri, cioè dalla parte doue elle s'accoſtano, gionti inſieme, è minore di dui angoli retti. Per dimoſtrarlo. Dal punto a, alla q n, ouero dal punto r, alla p g, ſi tiri la perpendicolare r t, & ſia che ella arriui alla p g, in t, dalla banda ſiniſtra da a, & allhora conſiderato il triangolo rettãgolo a t r; del quale il lato t a, è allungato in g; ſapremo, che l'angolo g a r, eſteriore d'eſſo triangolo è eguale alla ſomma delli dui a t r, & a r t, interiori oppoſtili, onde giontoli communemente l'angolo n r a, la ſomma delli g a r, & n r a, ſarà eguale alla ſomma delli tre a t r; a r t, & a r n; ò vogliamo dire alla ſomma delli dui a t r, & t r n, (ponendo il t r n, in vece delli dui a r t, & a r n, ſue parti, che lo compongono totalmente) ma la ſomma delli dui a t r, & t r n, è minore di dui retti; perche eſſendo a t r, retto, il t r n, è acuto (per la 6. di queſto) perilche anco la ſomma delli dui g a r, & n r a, interiori deſtri delle linee date non equidiſtanti ſarà minore di dui retti. Et ſe dal punto r, tirando vna perpendicolare alla p g, ella andaſſe dalla banda deſtra dall' a, eſ-

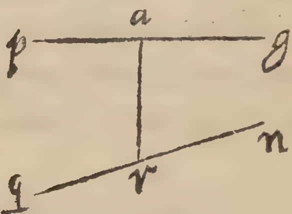


D ſendo

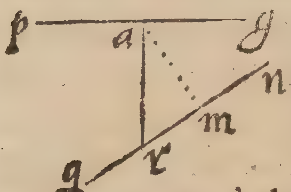
ſendo la r t; dell'altra figura rincontro; allhora cõſiderato il trian



golo a t r, rettangolo, che hà il lato a t, allungato in g; l'angolo g t r, eſteriore d'eſſo, ſarà eguale alli dui interiori t a r, & t r a, onde gionto communemẽte l'angolo t r n; la ſomma delli tre t a r, t r a, & t r n, & però delli dui t a r, & a r n, (ponendo l'a r n, in vece delli t r a, & t r n, ſue parti) ſarà eguale alla ſomma delli dui g t r, & t r n; ma la ſomma di queſti è manco di dui retti (eſſendo il g t r, retto dalla conſtruttione, & però il t r n, acuto (per la 6. di queſto) perilche anco la ſomma delli dui t a r, & a r n, interiori deſtri delle date non equidiſtanti auicinãtiſi dalla detta parte deſtra ſarà minore di dui retti. Et ſe dal punto r, tirando vna per-



pẽdicolare alla p g, ella vi arriuaſſe in a, cioè che la iſteſſa ſegante a r, fuſſe perpendicolare alla p g; allhora, perche (per la 6. di queſto) eſſendo l'angolo g a r, retto, l'a r n, ſaria acuto (approſsimandoſi dal ſuppoſito da quella banda deſtra le date non equidiſtanti) chiaramente ſi conoſce la ſomma d'eſsi dui angoli g a r, & a r n, cioè d'vn retto, & d'vno acuto, eſſere minore di dui retti. Ouero quando la a r, ſia perpen-

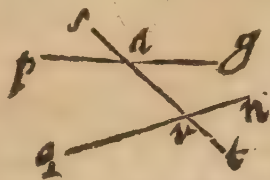


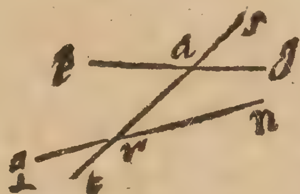
dicolare alla p g, (cioè ad vna delle due date nõ equidiſtanti) cioè l'angolo g a r, retto, allhora dal punto a, alla q n; tirata vna perpendicolare (quale per la 9. di queſto ſegarà l'angolo g a r, cioè caderà dalla banda deſtra dal punto r, doue le non equidiſtanti ſi auicinano, & ſarà più corta della a r) & ſia la a m; che l'angolo a m n, ſarà retto, & eſſendo eſteriore del triangolo a r m, che hà il lato r m, allungato in n, ſarà eguale alla ſomma delli dui intrinſici oppoſtili r a m; & a r m; onde giontoli communemente l'angolo g a m; che è acuto, cioè parte del retto g a r; la ſomma da vna bãda, che è delli tre a r m; r a m, & g a m, & però delli dui a r m, & g a r, (ponendo il g a r, in vece delle ſue due parti r a m, & g a m, che preciſemente lo compongono) ſarà eguale alla ſomma delli dui a m n, & g a m; ma queſta ſomma è minore di dui retti, perche l'vno a m n; è retto, & l'altro g a m, è acuto; perilche ſimilmẽte la ſomma di quelli g a r, & a r n, interiori deſtri delle date non equidiſtanti ſarà minore di dui retti.

Ma ancora facilmente ſi potrà concludere la verità della iſteſſa prima parte della decima propoſitione; così,

Perche

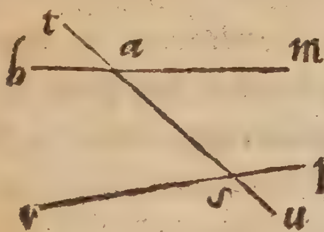
Perche le due date non equidistanti p g, & q n; segate dalla a r; si vanno auicinando dalla parte g n, elle si considerino, ò imaginino, allungate quanto bisogna, accioche auicinãdosi più di continuo finalmẽte cõcorrino, e sia supposto il concorso in b.

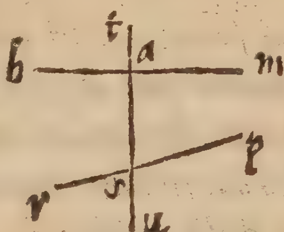




Onde considerato il triangolo b a r, & vno de' suoi lati b a, ouero b r, allungato in p, ouero in q, (ouero il lato a r, allungato in s, ouero in t) poniamo il b a, in p, ne segue, che l'angolo esteriore p a r, sia maggiore dell'angolo a r b, interiore oppostoli; Ouero perciò che l' s a b, eguale al p a r, (per la 15. del primo d'Euclide) sia maggiore del detto a r b, perilche giontoli communemente l'angolo b a r, la somma delli dui p a r, & b a r, ouero delli dui s a b, & b a r, qual somma è eguale à dui retti (per la 13. del primo) sarà maggiore della somma delli dui b a r, & a r b, cioè ne segue, che la somma di questi g a r, & a r n, interiori destri sia minore di dui retti; ma li quattro interiori in sõma sono eguali à quattro retti, però la somma delli dui restãti p a r, & q r a; quali sono dalla parte sinistra, doue le linee date si vanno discostando sarà maggiore di dui retti.

Hora, che l'angolo interiore dalla parte destra, doue le due date non equidistanti si suppongono andarsi auicinando, sia minore dell'interiore à lui coalterno dall'altra parte, cioè che l' a s p, sia minore dell' h a s, ouero che l' m a s, sia minore dell' a s r. è facile da prouare; perche, sapẽdo già per quello, che si è dimostrato, che la sõma delli dui interiori destri m a s, & a s p, è minore di dui retti;





& (per la 13. del primo) che la somma delli dui m a s, & h a s, è eguale à dui retti, leuando da ciascuna d'esse somme l'angolo m a s, commune, il restante a s p, da vna parte sarà minore del restante h a s, dall'altra; Et similmente, perche la somma delli dui r s a, & a s p; è eguale à dui retti, & però maggiore della somma delli dui m a s; a s p; minore di dui retti, leuando communemente da ciascuna sõma l'angolo a s p; ne restarà l' r s a; maggiore dell' m a s; ò vogliamo dire l' m a s, minore dell' r s a, à lui coalterno dall'al-

 tra par-

tra parte finiſtra. Nel medeſmo modo ſi farà chiaro, che ciaſcuno delli dui angoli interiori deſtri, cioè dalla parte doue le due date non equidiſtanti ſi vanno auicinando, è minore dell' eſteriore à lui oppoſto dalla medeſima parte; perche quanto all' m a s, interiore ſuperiore deſtro, la ſomma d'eſſo con l' a s p; è minore di dui retti, & però minore della ſomma delli dui a s p, & p s u, che è eguale à dui retti, onde leuando communemēte l' a s p, il ſolo m a s, interiore ſarà minore del ſolo p s u, eſteriore. Ouero, perche m a s, è minore di a s r, à lui coalterno, ſarà anco minore dell' u s p, eguale (per la 15. del primo) à detto coalterno a s r; L'iſteſſo ſi dice dell' a s p, riſpetto al t a m. Et che poi dall'altra parte finiſtra, doue le date non equidiſtanti ſi vanno allontanando, conuerſamente auuenga, che ciaſcuno delli dui angoli interiori ſia maggiore dell'eſteriore oppoſtoli dalla medeſima parte, pure è facilmente chiaro, poiche quāto all' a s r, egli con l' h a s, forma ſomma maggiore di dui retti (per la prima parte di queſta propoſitione) ma con il medeſmo h a s, gionto il t a h, ſe ne compone ſomma ſolo eguale à dui retti, & però quella ſomma è maggiore di queſta, onde il ſolo angolo a s r, interiore ſiniſtro, ſarà anco maggiore del ſolo t a h, eſteriore ſiniſtro à lui oppoſto. Et nel medeſmo modo ſi proua l'altro h a s, interiore ſiniſtro eſſere maggiore dell' altro eſteriore ſiniſtro oppoſtoli r s u; che è quanto occorrea dimoſtrare.

PROPOSITIONE VNDECIMA.

Se ſopra à due rette date, eſſendo tirata vna retta, che le ſeghi ambedue, occorra, che la ſomma delli dui angoli interiori da vna medeſima parte ſia eguale à dui angoli retti, Ouero che l'interiore ſuperiore da vna parte ſia eguale all'interiore inferiore dall'altra parte, cioè al ſuo coalterno; Ouero che l'eſteriore ſia eguale all'interiore oppoſtoli dalla medeſima parte; allhora è neceſſario, che eſſe due rette date ſiano equidiſtanti frà loro.

PERCHE, ſe le due rette date non fuſſero equidiſtanti frà loro, elle ſariano non equidiſtanti; ma non equidiſtanti non poſſono eſſere, perche allhora, per la decima di queſto, conuerria, che la ſomma delli dui angoli interiori da vna medeſima parte fuſſe maggiore, ò minore di dui retti. Et che l'intrinſico ſuperiore da vna parte fuſſe ineguale all'intrinſico inferiore dall'altra parte, cioè al ſuo coalterno. Et che l' eſteriore fuſſe ineguale all' interiore oppoſtoli

dalla

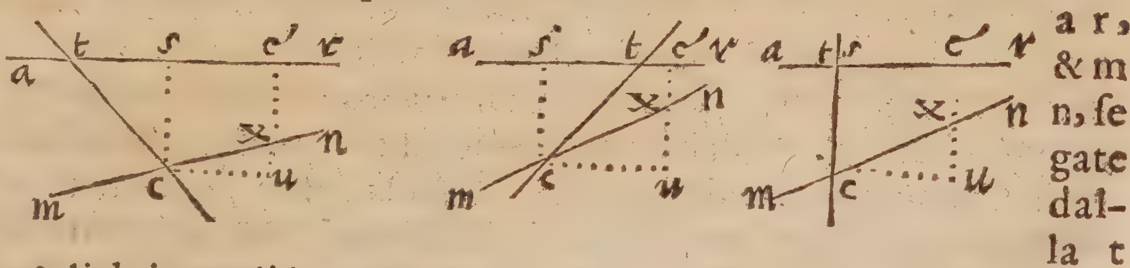
dalla medesima parte, il che tutto è contro il supposito; non potendo dunque le rette date, essere non equidistanti, saranno frà loro equidistanti, come si volea dimostrare.

Notisi, che la sopradetta vndecima propositione dimostra l'istesso, che si fà nella 27. & 28. del primo d'Euclide.

PROPOSITIONE DVODECIMA.

Se due linee rette date siano segate da vna retta, & occorra, che la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte sia maggiore, ò minore di dui angoli retti, Ouero che l'intrinsico superiore da vna parte sia ineguale all'intrinsico inferiore dall'altra parte (che sono coalterni frà loro.) Ouero che l'esteriore sia ineguale all'interiore oppostoli dalla medesima parte; allhora le due rette date saranno non equidistanti frà loro; Et più si auicinarano dalla banda doue li dui angoli interiori gionti insieme sono minori di dui retti, O doue (che è l'istesso) l'intrinsico è minore dell'altro intrinsico è interiore à lui coalterno, O doue (che pure è l'istesso) l'intrinsico è minore dell' estrinseco oppostoli dalla medesima parte.

PERCHE le due rette date, conditionate, come si dice, non possono essere equidistanti, che allhora (per la quarta di questo) di necessità, la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte saria eguale à dui retti; L'interiore saria eguale all' interiore dall'altra parte à lui coalterno. Et l'esteriore saria eguale all'interiore oppostoli dalla medesima parte; il che tutto è contro il supposito; Non potendo dunque essere equidistanti frà loro, sarãno non equidistanti, come si volea dimostrare. Et che le due rette date, più si auicinino dalla banda, doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui retti, si può dimostrare, così. Essendo le rette date a r, & m n, segate dalla t

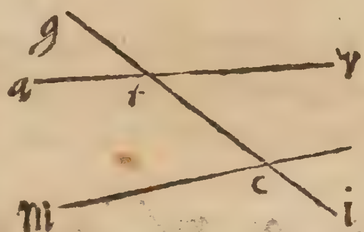


c; & li dui angoli interiori r t c, & n c t, da vna medesima parte destra, minori di dui retti (che così li dui interiori sinistri saranno maggiori di dui retti, poiche tutti quattro li interiori sono sempre

eguali

eguali à quattro retti) si dice, che esse due rette date più si auicinano dalla parte destra; perche accioche li dui angoli interiori destri in somma douentassero eguali à dui retti, stando fermo il superiore r t c; conuerria aggrandire l'inferiore t c n; aggiungendoli quello, che manca alla somma loro per arriuare à dui retti. Et stãdo ferma la linea t c, conuerria tirare dal punto c, vna retta, che con la t c, formasse angolo tanto maggiore del t c n, quanto bisognasse, & perciò essa linea da tirarsi passaria di sotto dalla c n; hor sia la c u, (che si trouaria tirando dal c, vna perpendicolare c s, alla a r, & dal c, à questa c s, la perpendicolare c u) & da vn punto segnato in detta c u; poniamo dall' u; si tiri la perpendicolare u e, alla a r, quale verrà à segare la c n, posta frà c u, & s r, & sia il segamento in x, cioè scriuasi x, nel punto del segamento; perilche la parte x e, d'essa sarà più corta della totale u e, & perciò sarà ancora più corta della c s, eguale alla u e, (che essendo le due rette s r, & c u, equidistanti frà loro (per la 7. di questo) perche sono segate da s c, che fà angoli retti con ciascuna di loro, cioè che è perpendicolare à ciascuna di loro) & le c s, & u e, perpendicolari alla a r; & perciò anco perpendicolari alla c u, (per la 2. di questo) mostrando la distanza dell' vna all'altra, & essendo esse distanze eguali frà loro (per la equidistanza detta delle s r, & c u) conuerrà, che c s, & u e, quali mostrano esse eguali distanze siano eguali frà loro) perilche più vicina è la m n, alla a r, in x, che in c; Onde elle si vanno auicinando dalla parte d'x, cioè dalla parte destra, come si volea prouare. Et consequentemente si vanno allontanando dalla sinistra, poiche c s, distanza sinistra è più lũga di x e, distãza destra della inferior linea m n; alla superiore a r; nelli dui diuersi punti c, sinistro, & x, destro. Ancora, che le due rette date si vadano auicinando dalla parte doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui angoli retti, si può prouare così. Se le due rette date, & già prouate essere non equidistanti, & che perciò necessariamente da vna banda si auicinano, & dall'altra si allontanano; nõ si auicinassero più dalla bãda delli angoli minori di dui retti, elle conuerria, che si auicinassero dall'altra, oue la somma delli dui angoli interiori viene ad essere maggiore di dui retti, & si allontanassero dalla banda (& sia la destra) doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui retti. Ma la somma delli dui angoli interiori dalla banda doue le linee non equidistãti si vanno allontanando è sempre maggiore di dui retti (per la 10. di questo) onde essi dui angoli interiori destri, in vn'istesso tempo sariano minori,

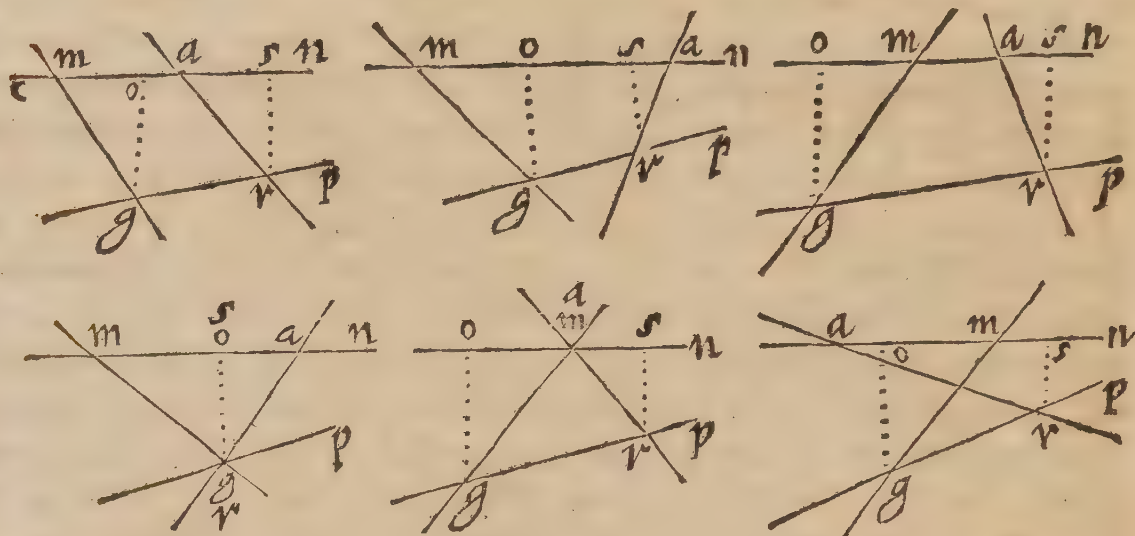
minori, & maggiori di dui angoli retti, il che è impossibile, impossibile è dunque, che le due rette date non si auicinino da detta parte destra, & perciò da essa parte destra doue la somma de' dui angoli interiori è minore di dui retti, si andaranno auicinando; andando allontanandosi dall'altra, doue la somma de' dui angoli interiori è maggiore di dui retti. Et quanto alli angoli interiori coalterni. Se nelle due rette date a r, & m n, segate dalla t c, occorrerà che l'angolo r t c, intrinsico superiore destro, sia minore dell' angolo t c m, intrinsico inferiore sinistro à lui coalterno (ouero che il t c n, intrinsico inferiore destro, sia minore dell'angolo a t c, intrinsico superiore sinistro à lui coalterno) questo anco ci mostrarà, che esse linee (già conosciute non equidistanti per causa della inegualità di detti angoli coalterni) più si auicinaranno da detta parte, doue l'angolo è minore; perche se così all' r t c, minore, come al t c m, di lui maggiore si imagini giunto, il t c n; la somma delli dui r t c, & t c n, che sono li interiori da vna medesma parte destra, sarà minore della somma delli dui t c m, & t c n; ma questa somma è eguale à dui retti (per la 13. del primo d'Euclide) però quella di detti dui interiori destri sarà minore di dui retti; Onde per la prima parte di questa propositione, già dimostrata, ne segue, che dalla medesima parte destra le due date a r, & m n, si vadano auicinando, & dall'altra allontanando. Et similméte, quanto all' esteriore, & interiore oppostoli dalla medesima parte; se sapremo, che l'angolo interiore r t c, sia minore dell' esteriore i c n, oppostoli dalla medesina parte destra, ouero il t c n, del g t n, pure concluderemo, che le due date a r, & m n, (già conosciute non equidistanti, per causa della inegualità di detti angoli interiore, & esteriore oppolti da vna medesima parte) si vadano auicinãdo da detta parte destra; perche essendo minore il t c n; del g t r; se così all' vno, come all'altro si giunga mentalmente il c t r; la somma d'esso, col t c n; sarà minore, che la somma d'esso, col g t r; ma la somma, col g t r; è eguale à dui retti, però la somma, col t c n, sarà minore di dui retti; & perche questa somma di t c n, & c t r, comprende li dui angoli interiori destri, ne segue (per la prima parte già prouata di questa propositione) che da essa parte destra le date a r, & m n, si deuano andare auicinando, & andarsi allontanando dall'altra parte sinistra.



PROPOSITIONE DECIMATERZA.

Se ſopra à due rette date, ſi tirino linee ſeganti, la ſommà delli dui angoli interiori da vna medeſima parte, che farà l'vna ſegante con le due date, ſarà eguale alla ſomma delli dui angoli interiori, che dalla medeſima parte farà qual ſi vogli altra ſegante con le iſteſſe due date.

SE le due rette date ſiano equidiſtanti; perche qual ſi vogli retta, che le ſeghi, fà la ſomma delli dui angoli interiori con eſſe date, da vna medeſima parte eguali à dui retti ſempre (per la 4. di



queſto) è chiaro quanto ſi propone. Ma ſe le due date ſiano non equidiſtanti, poniamo m n, & g p, ſegate da a r, & m g; prouaremo quanto ſi propone, così. Tirate le perpendicolari g o, & r s, all'vna delle date, dalli dui punti del ſegamento nell'altra, quali due perpendicolari ſaranno equidiſtanti frà loro (per la 8. di queſto) & perciò la ſomma delli dui angoli deſtri interiori a o g, & o g r, che fà l'vna con le due date, ſarà eguale alla ſomma delli dui angoli interiori pur deſtri n s r, & s r p; che fà l'altra con le iſteſſe due date (eſſendo l'a o g, da ſe eguale all'n s r, & l'o g r, all's r p, per la 4. di queſto.) Perche poi à quelli ſi eguagliano li dui s m g, & m g r, interiori fatti dall'vna ſegante con le due date dalla parte deſtra, & à quegl'altri ſi eguagliano li dui s a r, & a r p; interiori fatti dall'altra ſegante con le iſteſſe due date dalla medeſima parte deſtra (& il tutto per quello, che ſi è dimoſtrato nella prima parte della decima di queſto) ne ſegue, che la ſomma delli dui fatti dall'vna ſegante, ſia eguale alla ſomma delli dui fatti dall'altra

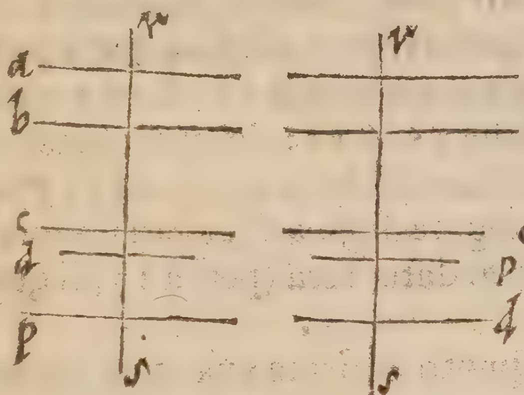
ſegante

ſegante da vn'iſteſſa parte deſtra con le due date. Et conſequentemente la ſomma delli dui angoli interiori fatti dalla parte ſiniſtra con le due date dall'vna ſegante ſarà eguale alla ſomma delli dui interiori fatti dalla medeſima parte ſiniſtra con le due date dall'altra ſegante, poiche, così queſti, come quelli ſono il reſtante delli deſtri à quattro angoli retti.

PROPOSITIONE DECIMAQVARTA.

Se quante ſi voglino rette linee date ſiano equidiſtanti ad vna iſteſſa retta propoſta, elle ſaranno equidiſtanti frà loro.

SIA ciaſcuna delle date a b c d, equidiſtante alla propoſta p; Si dice elle eſſere equidiſtanti frà loro. Perche imaginata vna retta perpendicolare alla propoſta, & queſta allungata, finche ſeghi ciaſcuna delle date (imaginate anco elle allungate, ſe occorrerà, finche la perpendicolare alla propoſta le poſſa ſegare) & ſia la r s, ella (per la ſeconda di queſto) ſarà anco perpendicolare à ciaſcuna delle date; onde (per la ſettima di queſto) ciaſcuna delle date, ſarà equidiſtante à ciaſcuna altra d'eſſe date, cioè la a, à ciaſcuna delle altre, ſimilmente la b, à ciaſcuna delle altre, & coſì la c, alla d, & à quante altre equidiſtanti alla p, ſi trouaranno.



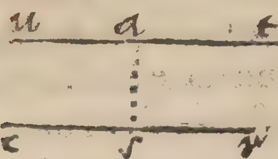
PROPOSITIONE DECIMAQVINTA.
Problema, ouero Operatione.

Da vn punto dato, tirare vna retta equidiſtante ad vna retta propoſta, che non ſia in diretto con detto punto dato, cioè tale, che dal punto dato, tirando vna linea ad vn termine della propoſta, ella non ſi vniſca per il diritto con la propoſta, ma facci angolo con lei.

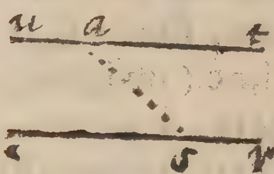
DAL punto a, dato, per tirare vna retta equidiſtante alla propoſta c r; Da eſſo punto, tiriſi vna perpendicolare alla c r; (allungando eſſa c r, quando occorreſſe, di modo, che vi poſſa cader ſopra detta perpendicolare, ò vogliamo dire, accioche ella poſſa eſſere ſegata da detta perpendicolare) & ſia la a s; Et dal punto

 illeſſo

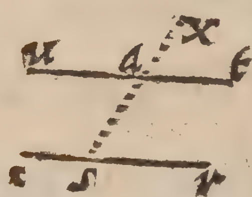
isteſſo dato a, ſi tiri vna perpendicolare à queſta a s, ò dalla parte ſiniſtra, ò dalla deſtra, come ſi vogli, & ſia la a u; ouero la a t, quale a u, ouero a t; ò vogliamo dire la u t, ſarà equidiſtante alla c r, come ſi volea (per la 7. di queſto) eſſendo dalla conſtruttione vna medeſima retta a s, perpendicolare, & alla propoſta c r, & alla a u; ouero a t, ò vogliamo dire alla totale u t; O vogliamo dire, la u t; ſarà equidiſtante alla c r, (per la 11. di queſto) eſſendo ciaſcuno delli angoli all' a, & all' s, retto, & però facendo la ſomma delli dui angoli t a s, & r s a, interiori deſtri, ouero la ſomma delli dui u a s, & c s a, interiori ſiniſtri, eguali à dui retti.

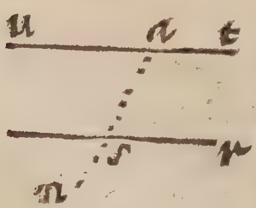


Ouero in altro modo. Dal punto dato a, tiriſi vna retta, come ſi vogli, che arriui alla propoſta c r, & ſia la a s, poi dal punto isteſſo a, dalla parte deſtra ſi tiri la a t; che cō la a s, facci angolo eguale all' a s c; ſiniſtro, formato dalla a s, & s c; Ouero, poi dal pūto isteſſo a, dalla parte ſiniſtra ſi tiri la a u, che con la a s; facci angolo eguale all' a s r; deſtro, formato dalla a s, & s r; che così eſſendo li dui angoli t a s, & a s c, coalterni; Ouero li dui u a s, & a s r; pure coalterni (delle due rette u t, & c r, ſegate dalla a s; eguali frà loro; la u t, tirata, ò che paſſa per il punto a, dato, ſarà (per la 11. di queſto) equidiſtante alla c r, propoſta.



Ouero in altro modo. Dal dato punto a, tirata vna retta, come ſi vogli, che arriui alla c r, propoſta, & anco allungata di ſopra al punto a, quanto ſi vogli, poniamo in x; poi dal punto a, ſi tiri la a t, che dalla parte deſtra con la a x, facci angolo eguale all' a s r, che dalla isteſſa parte deſtra fà la a s, tirata con la s r, Ouero (che reſulta l'isteſſo) poi dal punto a, ſi tiri la a u; che dalla parte ſiniſtra con la a x, facci angolo eguale all' a s c, che dalla isteſſa parte ſiniſtra fà la a s, tirata con la s c; che così, cōſiderate le due rette u t, & c r, ſegate dalla x s, perche l'angolo eſteriore x a t, deſtro è eguale all'interiore a s r; oppoſtoli dalla medeſima parte, Ouero, perche l'angolo eſteriore x a u, ſiniſtro è eguale all'interiore a s c, oppoſtoli dalla medeſima parte, ſapremo (per la 11. di queſto) che le due u t, & c r, ſono equidiſtanti frà loro. Et quando la retta s a, non ſi voleſſe allungare dalla parte ſuperiore a; allunghiſi dalla inferiore s, poniamo in n, & poi dal punto a, ſi tiri la a t, deſtra, che con la a s, facci l'angolo t a s, deſtro eguale





eguale all'esteriore destro r s n; Ouero si tiri la a u, sinistra, che con la a s, facci l'angolo u a s, sinistro eguale all'esteriore sinistro c s n; che per la medesma causa sopradetta la a t, ò vogliamo dire la u t, sarà pure equidistante alla proposta c r. Ne è da dubitare, che le rette u a, & a t, non siano congiunte insieme per il diritto, formando vna retta u t; cioè che la u a, allungata verso a, non si vnisca con la a t; ouero che la t a, allungata verso a, nō si vnisca con la a u; poiche essendo l'angolo x a t, eguale all' a s r, & l' x a u, eguale all'a s c; ancora la somma delli dui x a t, & x a u; sarà eguale alla somma delli dui a s r, & a s c; ma questa è eguale à dui retti (per la 13. del primo d' Euclide) & però anco quella somma sarà eguale à dui retti; perilche (per la 14. del primo) le due a t, & a u; sono insieme congiunte per il diritto; L'istesso occorre nelli altri modi superiori di operare, che in ciascun d'esi là somma delli dui angoli t a s, & u a s, è eguale à dui retti.

LAVS DEO SEMPER.

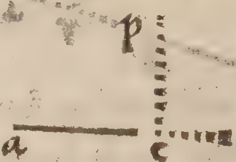


DEFINITIO PRIMA.

Distantia puncti dati extra propositam lineam rectam indefinitæ longitudinis ad ipsam propositam rectam, dicitur esse linea recta breuissima, quæ discedens à puncto dato perueniat ad rectam propositam.



Exempli gratia. Proposita sit recta a c, indefinitæ longitudinis, scilicet, vt possit produci à qualibet parte quantumlibet. Et dato puncto p, extra rectam ipsam (scilicet quod non sit indirectum

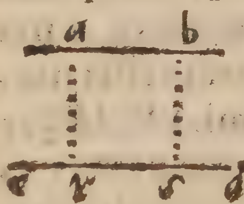


ipsius lineæ, seu tali in loco sit vt producta recta proposita, transire non possit per datum punctum p.) Distantia dicti puncti dati p, à proposita recta a c, dicitur esse recta breuissima, quæ considerata discedere ab ipso dato puncto p, perueniat ad propositã rectam a c, seu ad ipsius rectitudinem.

DEFINITIO II.

Linea recta data dicitur esse æquidistans rectæ propositæ in eodem plano, quando à duobus diuersis punctis ad libitum in data recta assumptis, ductis rectis breuissimis ad propositam, ipsæ sint ad inuicem æquales, seu manis. Quando in data recta linea, duobus diuersis punctis signatis, distantiæ ab ipsis punctis ad rectam propositam sint æquales. Sed non æquidistantes dicentur, data, & proposita, quando distantiæ ipsæ essent inæquales. Et ipsæ duæ rectæ, data scilicet, & proposita, dicũtur altera alteri viciniores fieri ab ea parte in qua distantia reperiatur minor, & remotiores fieri ab ea parte, in qua distantia reperiatur maior.

Exempli gratia. Lineæ rectæ, scilicet data a b, & proposita c d, dicuntur esse æquidistantes ad inuicem, quando in data a b, assumptis, vel signatis duobus diuersis punctis, & sint a, & b, & ab ipsis ad propositã c d, ductis lineis breuissimis (semper hac ratione, vt ipsa c d, ad quam ducendæ sunt dictæ lineæ breuissimæ intelligatur esse indefinitæ longitudinis, scilicet, quod vtrinq; possit produci, quãdo opus sit, vt lineæ breuissimæ, quæ ibunt à susceptis punctis in data, ad rectitudinem ipsius propositæ terminari possint in ipsa proposita) & sint a r, & b s; ipsæ ad inuicem sint æquales, scilicet, vt æquæ longa sit a r, a c, b s, quæ



 osten-

ostendunt distantiam ab a b, in duobus diuersis punctis a, & b, ad rectam c d, seu ad directionem ipsius c d, Sed quando ab a, ducta linea breuissima ad eandem c d, (quantum opus sit producta) & sit a d, & à b, ducta recta breuissima ad eandem c d, & sit b r, eueniat, vt rectæ a d, & b r, (ostēdentes distantias rectæ a b, ad rectam c d, seu ad rectitudinem eius, in duobus diuersis punctis a, & b,) sint ad inuicem inæquales, tunc rectæ ipsæ a b, & c d, dicuntur esse non æquidistantes. Et ex distantijs, seu rectis breuissimis a d, & b r, reperta minori, seu breuiori b r, dextra, dicuntur rectæ a b, & c d, non æquidistantes, appropinquari ab ipsa parte dextra lineæ b r, breuioris, & remoueri à parte sinistra lineæ a d, lōgioris.



THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si à dato puncto ad lineam propositam indefinitæ longitudinis, ducatur perpendicularis, ipsa perpendicularis erit linea omnium breuissima earum quæ à puncto dato discendentes peruenire possint ad rectam propositam, nec aliqua alia recta, quæ ab eodem puncto dato discedens, perueniat ad eandem rectam propositam, poterit esse æqualis dictæ perpendiculari.

DATVM sit punctū a, & proposita recta b c, ad quam à puncto a, ducta sit perpendicularis a r; dicitur ea esse linea breuissima, quæ à puncto a, discedens peruenire posit ad rectā b c; Nam si ipsa breuissima non esset (per aduersarium) aliqua alia linea esset breuior ipsa a r, & sit (si fieri posit) a n, ideo in triangulo rectangulo a r n, cum per aduersarium latus a n, sit breuius a r, etiam (per 18. primi) angulus rectus r, oppositus rectæ a n, esset minor angulo a n r, ideo angulus a n r, esset obtusus, maior scilicet recto, sed etiam angulus externus a n c, (per 16. primi) est maior interno sibi opposito a r n, recto, ideo ipse etiam erit obtusus; cum ergo quilibet duorum angulorū a n r, & a n c, sit obtusus, scilicet maior recto, summa ipsorum esset maior duobus rectis, quod est imposibile (per 13. primi.) Vel si per aduersarium, recta a n, esset breuior recta a r, etiam angulus r, rectus, esset minor angulo a n r, quamobrem a n r, esset obtusus, sed angulus ipse a n r, simul cum a n c, constituunt summā æqualem duobus rectis (per 13. primi) ideo existente angulo a n r, maiori re-



iori re-

iori recto, tunc a n c, (quod est residuum duorum rectorum) esset minor recto, ideo acutus, sed ipse a n c, est externus triãguli a r n, & ideo maior interno r, recto, sibi opposito, quamobrem acutus angulus esset maior recto, quod impossibile est, ergo etiam est impossibile, vt recta aliqua, quæ à puncto a, perueniat ad rectã b c, esse possit breuior perpendiculari a r. Quod etiam nulla alia recta, quæ ab eodem puncto dato discedens perueniat ad eandem rectam propositam possit esse æqualis dictæ perpendiculari a r, ita probatur. Si per aduersarium aliqua alia, & sit a n, æqualis esse posset rectæ a r, tunc in triangulo a r n, duorum laterum a r, & a n, æqualium (per aduersarium) anguli r, & n, ad basim (per primã partem quintæ primi) essent ad inuicem æquales, sed r, est rectus, ideo n, etiã esset rectus. Et quia duo anguli a n r, & a n c, sunt æquales duob. rectis (p 13. primi) vno a n r, existẽte recto, alter ẽt a n c, esset rectus, sed ipse a n c, est externus trianguli a r n, ideo maior interno sibi opposito r, recto, vnde rectus esset maior recto (vel externus esset æqualis interno sibi opposito ambobus existentibus rectis) quod est impossibile; impossibile ergo est quod aliqua alia recta ducta ab a, puncto, vsq; ad rectam b c, sit æqualis, neq; minor perpendiculari a r; ideo ipsa a r, erit recta breuissima.

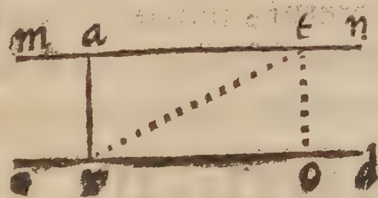
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod. Quando à dato puncto ad rectam propositam ducitur perpendicularis, ipsa est distantia, qua reperitur inter punctum datum, & lineam propositam.

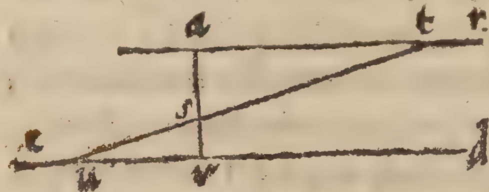
THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Quando duæ rectæ lineæ ad inuicem sunt æquidistãtes, lineæ à prima perpendiculariter peruenietes ad secundam erunt etiam perpendiculares ipsi primæ.

SInt duæ rectæ m n, & c d, æquidistantes, & à puncto a, in prima notato, ducta sit a r, perpendicularis ad secundam, scilicet, vt faciat angulos ad r, rectos, dicitur eadem a r, perpendicularis etiam esse ad primã lineam m n, scilicet, quod anguli etiam ad a, sunt recti; Nam si ipsa r a, non esset perpendicularis ad m n, sequeretur, quod si ab r, duceretur recta perpendicularis ad m n, ipsa alibi termina-



retur, quã in a; terminetur ergo si possibile est in t, & ideo a t r, & n t r, essent anguli recti, & in triangulo rectangulo r t a, quod habet latus t a, productum in m, angulus r a m, externus (per 16. primi) esset minor recto r t a, interno, sibi opposito, ideo esset obtusus, sed summa duorum angulorum r a m, & r a t, est æqualis duobus rectis, ideo cum vnus ipsorũ r a m, sit maior recto, scilicet obtusus, alter qui remanet r a t, esset minor altero recto, ideo acutus, quare ipse esset minor angulo r t a, qui est rectus per aduersarium. Et considerato triangulo rectangulo r t a; quia angulus r a t, acutus, esset minor angulo r t a, recto, latus etiam r t, quod opponitur acuto esset minus latere r a, recto opposito; Nunc à puncto t, ducatur perpendicularis ad rectam c d, & sit t o, quæ necessario perueniet ad c d, à parte dextra puncti r, scilicet versus d, (in r, enim ire non potest, scilicet non potest esse t r, nam tunc angulus t r d, esset rectus, sed ipse est pars anguli a r d, qui etiam est rectus (ex hypothesi) & anguli recti sunt ad inuicem æquales, ideo pars



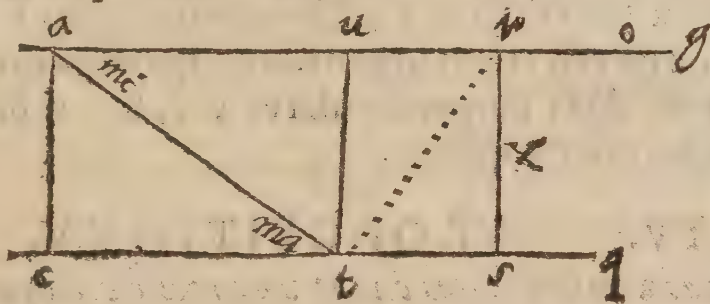
esset æqualis toto, quod est impossibile. Nec etiam inter r, & c, ire potest, ponamus in u, secando rectã a r, ponamus in s, nam tunc in paruo triangulo s u r, cum angulus u, internus sit rectus, ipse esset æqualis angulo s r d, qui etiam est rectus, & internus ipsi oppositus, quod est impossibile (per 16. primi) & quia ex hypothisi duæ rectæ m n, & c d, sunt æquidistantes, duæ a r, & t o, perpendiculares ad c d, erunt ad inuicem æquales, & quia angulus a r d, est rectus, angulus t r o, eius pars, & ꝓpterea minor eo, erit acutus, scilicet minor recto; ideo minor etiam angulo recto t o r, cum autem in triangulo rectangulo t o r, angulus t r o, acutus, sit minor t o r, recto, etiam latus t o, (acuto oppositum) erit minus latere r t, (recto opposito) quare r a, etiam (t o, æquale) erit minus eadem linea r t, scilicet r t, erit maior r a, sed superius probatũ est ipsam r t, esse minorem ipsa r a, ideo r t, esset maior, & minor recta a r, quod est impossibile, ergo etiam impossibile est illud à quo hæc impossibilitas deduceretur, scilicet, quod a r, perpendicularis ad c d, non sit etiam perpendicularis ad m n, erit igitur ipsi m n, perpẽdicularis, ꝙ probandum proponebatur.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis lineis æquidistantibus, si à duobus diuersis punctis in

ctis in prima signatis ducantur duæ perpendiculares ad secundam, tunc pars primæ lineæ intercepta inter duos terminos perpendicularium, erit æqualis parti secundæ lineæ interceptæ inter alios duos terminos earumdem perpendicularium.

SINT duæ rectæ æquidistantes a g, & c q; & super primam a g, sint signata duo puncta a, & r, à quibus ad secundam c q, ducantur perpendicolares a c, & r s, quæ propter æquidistantiam linearum erunt ad inuicem æquales, & facient etiam angulos rectos cum recta a g, (per secundam huius.) Dicitur quod duæ a r, & c s, interceptæ inter ipsas perpẽdiculares erunt æquales ad inuicem; Nam si non essent æquales, vna ipsarum esset longior altera, sit ergo si possibile est c s, longior, & excessus remaneat ab vna parte, ponamus ad partem s, & sit s t, ita vt per aduersariũ t c, remaneat æqualis a r, & ducta a t, vterq; angulorũ c a t, t a r, pars recti a, erit acutus, nũc à puncto t, ad a g, ducatur perpendicularis t u, quæ necessario cadet inter r, & a, (in r, enim cadere non potest, quoniam angulus t r a, rectus, esset pars anguli recti s r a, & ipsi æqualis (cum anguli recti sint ad inuicem æquales) scilicet pars esset æqualis toto, quod est impossibile. Nec vltra r, ponamus in o, cadere nõ potest secando s r, ponamus in x, nam considerato triangulo x r o, quod haberet latus r o, productum in g, angulus x o g, externus cum esset rectus, esset æqualis angulo x r o, qui est rectus, & internus ipsi oppositus, quod est impossibile; Eadem de causa nõ poterit cadere in a, nec vltra.) Cum autem a u, pars a r, sit minor ipsa a r, erit etiam minor recta c t, ab aduersario posita æqualis a r. Et quia t u, est æqualis c a, ob æquidistantiam linearum, & cum t u, sit perpendicularis ad a g, est etiam perpendicularis ad c q, (per secundam huius.) Consideratis duobus triangulis a u t, t c a, quia duo latera a t, t u, vnius, sunt æqualia duobus lateribus t a, a c, alterius, sed basis u a, esset minor basi c t; etiam angulus a t u, contentus à dictis duobus lateribus vnius esset minor angulo t a c, contẽto ab antedictis lateribus alterius ipsis correspondentibus (per 25. primi) & propterea angulus a t c, residuum recti u t c, esset maior angulo t a u, quod est residuum recti c a u.



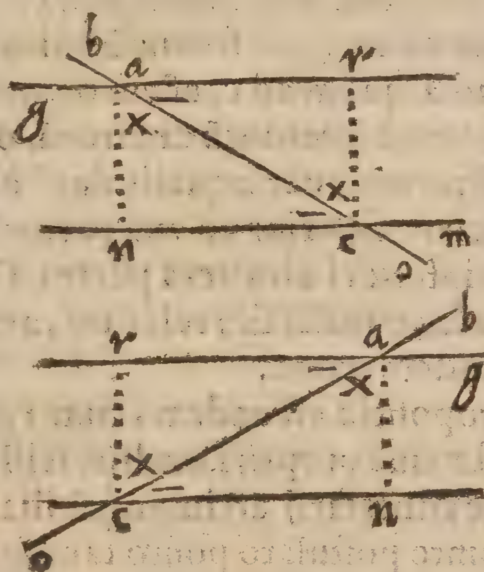
cti c a u. Nunc ducta t r, & confiderato triangulo t a r, & et a t c, in quibus per aduerſarium primũ latus r a, vnius eſt æquale primo lateri c t, alterius, & ſecundum a t, ad ſecundum t a, ſed angulus t a r, contentus duobus lateribus vnius eſt minor angulo a t c, contento duobus lateribus alterius, ſequitur (per 24. primi) quod baſis t r, ſit minor baſi c a, ſcilicet quod linea c a, ſit maior linea t r, & ideò quælibet duarum t u, & s r, (æqualium c a) eſſet maior eadem t r; Vnde in triangulo rectangulo t u r, quia t u, eſſet longius t r, angulus t r u, pars recti u r s, ideo acutus oppoſitus lateri u t, longiori, eſſet maior t u r, recto oppoſito lateri breuiori t r, ſcilicet angulus acutus eſſet maior recto, ſeu dicamus pars t r u, eſſet maior toto u r s, æqualis t u r (cum quiſq; ipſorũ ſit rectus) quod eſt impoſsibile; Vel triangulo rectangulo t s r. conſiderato, quia s r, eſſet longius t r, angulus r t s, acutus (qui eſt pars recti u t s) eſſet maior recto t s r, quod eſt impoſsibile, ergo erit etiam impoſsibile, quod duæ rectæ a r, & c s, poſitæ inter duas perpendiculares c a, & r s, ſint ad inuicem inæquales, ideo erunt æquales.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si ſuper duas rectas lineas æquidiſtantes cadat vna recta vtcũque ſecans ambas, duo anguli interni ab eadem parte formati ſimul ſumpti erunt æquales duobus rectis. Et etiam internus ſuperior ab vna parte erit æqualis interno inferiore ab altera parte. Itẽ quilibet externorum erit æqualis interno oppoſito ab eadẽ parte.

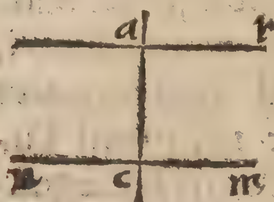
RECta a c, ſecet duas æquidiſtantes a r, & n m, in a, & c, Dicitur ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte eſſe æqualis duobus rectis, &c. Ad hæc demonſtranda, a, puncto a, ad rectam n m, ducatur perpendicularis a n, quæ propterea faciet etiã angulos rectos cum recta a r, in a (per ſecundam huius) & ab altero puncto c, ſectionis, ducatur ad a r, perpendicularis c r, quæ ſimiliter (per ſecundam huius) erit etiam perpendicularis rectæ n m, & propterea faciet etiam angulos rectos cum recta n m, & ipſæ duæ perpendiculares a n, & c r, erunt ad inuicem æquales, ex ſuppoſita æquidiſtantia rectarum a r, & n m. Item rectæ a r, & n c, interceptæ à dictis perpendicularibus a n. & c r, erunt ad inuicem æquales (per antecedentem tertiam propoſitionem) Vnde in duobus triangulis rectangulis a r c, & c n a, tria latera vnius ſunt æqualia tribus lateribus ipſis correſpondentibus alterius, ideo (per octauam primi)

mi) anguli vnius sunt æquales angulis ipsis correspondentibus alterius, scilicet r a c-, angulo n c a-, & r c a, x, angulo n a c, x, sed r a c, & n a c, continent vnum rectum n a r, scilicet sunt æquales vni recto, ideo r a c, & r c a, etiam erunt æquales vni recto, vnde ipsis addito angulo recto r c m, summa trium angulorũ r a c, r c a, & r c m, erit æqualis duobus rectis, sed tres anguli prædicti æquantur duobus internis dextris r a c, & a c m (q̃a a c m, per se, est æqualis duobus a c r, & r c m, suis partibus, in quibus diuisus est, quæ ipsum integrè continent) ideo duo interni dextri dicti sunt æquales duobus rectis. Et quia omnes quattuor interni, scilicet duo dextri, & duo sinistri simul sunt æquales quattuor rectis (per 13. primi Euclidis) cum iam duo dextri sint æquales duobus rectis, sequitur quod duo sinistri, etiam sint æquales alijs duobus rectis (est enim illud, q̃d remanet ex quattuor rectis dictis.) Vel quia angulus n c a - est æqualis angulo r a c -, & iste r a c, -, simul cum angulo n a c, x, continet vnum rectum r a n; angulus etiã n c a - simul cum angulo n a c, x, erunt æquales vni recto, ideo ipsis addito angulo recto n a g, summa eorum (& est, vt totalis g a c, vna cum n c a,) scilicet duo interni sinistri, æquabitur duobus rectis. Vel quia n c a - est æqualis angulo r a c -, addito communiter g a c, summa duorum n c a, & g a c, internorum sinistrorum erit æqualis summæ duorum r a c, & g a c, sed ista est æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo summa etiam duorum dictorum internorũ sinistrorum, erit æqualis duobus rectis. Quantum vero ad coalternos angulos attinet, iam ostensum est, quod angulus r a c - internus dexter superior est æqualis angulo n c a - interno sinistro inferiori; Et quantum ad g a c, ipse componitur ex vno recto, & ex x, sed ab alio recto, & ab alio x, componitur etiam m c a; ideo iste m c a, erit æqualis angulo g a c; Vel quia summa duorum r a c, & g a c, est æqualis duobus rectis, & etiam summa duorum n c a, & m c a, est æqualis duobus rectis, cum iam ostẽsum sit r a c, per se æquari angulo n c a, per se, sequitur, quod etiam reliquus g a c, erit æqualis reliquo m c a. Quod etiam quilibet externorum sit æqualis angulo interno opposito ab eadem parte, est facile cognitu; nam quo

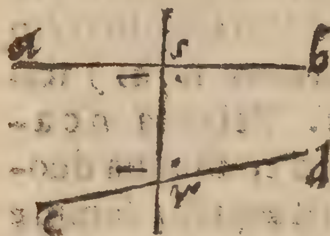


ad b a r,

ad b a r, ipſe eſt æqualis angulo a c m, cum quilibet eorum æque-tur angulo g a c, (qui opponitur angulo b a r, per interſectionem rectarum g r, & b c, & ideo eſt æqualis ipſi g a c, (per 15. primi) & eſt coalternus angulo m c a) Idem euenit de altero externo ſuperiore g a b, ſcilicet ob ſimilem cauſam eſt æqualis altero interno inferiori n c a, oppoſito ab eadem parte ſiniſtra; Et ſimiliter angulus m c o, externus erit æqualis interno r a c, & angulus o c n, angulo g a c. Et quando recta a c, ſecans, eſſet perpendicularis ad n m, ſcilicet quod à puncto a, ſectionis in a r, ducendo perpendicularē ad n m, ipſa perueniſſet in c, ſcilicet eſſet eadē a c, tunc ipſa eadem a c, etiā eſſet perpendicularis ad a r (per ſecundā huius) & ideo tam anguli ad a quàm ad c, eſſent omnes recti, vnde, & sūma duorū internorū dextrorū, & etiam ſumma duorum internorū ſiniſtrorum eſſet æqualis duobus rectis; Et ſimiliter etiam quilibet internus ſuperior ab vna parte eſſet æqualis ipſi coalterno, ſeu interno inferiori ab altera parte; Et etiam vnuſquiſq; quattuor externorū eſſet æqualis ſuo relatiuo, aut correſpondente interno oppoſito ab eadem parte.



Notandum eſt, quod ſuperior propoſitio eſt eadem, cum 29. primi Euclidis, & eſt demſtōrata oſtenſiuè proprijs medijs, ſcilicet ſine reductione aduerſarij ad impoſsibilia, nec opus habet quinto poſtulato poſito tamquā petitione, ſeu primo principio, quod eſt; Poſtuletur, quod ſi in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas inter ſe conuenire ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores. Et ideo ipſum quintum poſtulatum non eſt neceſſarium ad eam demonſtrandam.



Notetur etiam, quod cognoſcitur dictum quintum poſtulatū, non eſſe accipiendum, vt petitionem, ſeu primum principium, cum non habeat duas partes neceſſarias ad principia prima, quæ ſunt; Eſſe notum ad ſenſum, & eſſe indemonſtrabile. Imo dictum poſtulatum eſt demonſtrabile, & propterea poteſt, ſeu debet accipi vt Propoſitio, quod videtur factum eſſe in hoc Opuſculo, vbi demōſtratur in Propoſitio 12. in qua dicitur. Si duæ rectæ datæ ſecentur à recta, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab vna parte ſit maior, vel minor duobus angulis rectis. Vel quod internus ſuperior ab vna parte ſit inæqualis interno inferiori ab altera par-

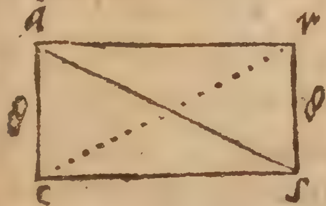
ra parte (qui ſunt coalterni ad inuicem) vel quod externus ſit inæqualis interno oppoſito ab eadem parte , tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidiſtantes ad inuicem ; Et ſe ſe appropinquabunt à parte, in qua duo anguli interni ſimul iuncti ſunt minores duob. rectis; Seu in qua(qđ eſt idē) internus eſt minor altero interno ipſi coalterno; Seu in qua (quod ſimiliter eſt idem) internus eſt minor externo ipſi oppoſito ab eadem parte .

Cuius propoſitionis, pars illa, in qua dicitnr. Quando duæ rectæ datæ ſecantur à recta , ſi accidat , quod ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte ſit minor duobus rectis (ſcilicet , quod duo anguli interni ab eadem parte ſimul ſumpti ſint minores duobus rectis) tunc ipſæ duæ rectæ datæ neceſſariò ſint non æquidiſtantes ; eſt (ſuperiori quarta propoſitione mediante) demonſtrata tali pacto. Duæ rectæ datæ, vt proponitur, eſſe non poſſunt æquidiſtantes,quia tunc (per quartam huius) neceſſariò ſumma duorum angulorum internorum ab vna , & eadem parte eſſet æqualis duobus rectis , anguli coalterni eſſent ad inuicem æquales . Et externus eſſet æqualis interno ſibi oppoſito ab eadem parte. Quod totum eſt contra hypotheſim ; Cum ergo non poſsint eſſe ad inuicem æquidiſtantes erunt non æquidiſtantes, vt oſtendendum proponebatur.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si ſuper datam rectam ducantur duæ perpendiculares æquales, & coniungantur cum vna recta ipſa erit æquidiſtans , & æqualis rectæ datæ ſuper quam duæ perpendiculares inſiſtunt, quæ etiam erunt perpendiculares ad lineã dictam,quæ cõiungit ipſas ſimul.

SVPER datam c s, rectæ a c, & r s, ſint perpendiculares , & æquales, ducaturq́; a r ; Dicitur ipſa a r, eſſe æquidiſtans, & æqualis rectæ c s ; Si enim a r, non eſſet æquidiſtans rectæ c s,eſſet ipſi non æquidiſtans, ideo in vna ipſarũ, a r, ſcilicet, ſumptis duobus diuerſis punctis a, & r, ipſa puncta eſſent non æqualiter diſtantia à recta c s ; ideo duæ perpendiculares a c, & r s, quæ oſtēdunt diſtãtias ipſas eſſent inæquales , ſed illæ inæquales eſſe non poſſunt (cum ex hypotheſi ponantur æquales) ideo nec etiam a r, poterit eſſe non æquidiſtans rectæ c s, ipſi ergo erit æquidiſtans , & propterea (per ſecundam huius) quælibet duarum a c, & r s, perpendicularis ad rectam c s, erit etiã perpendicularis ad a r, & propterea angulus a, & etiam angulus

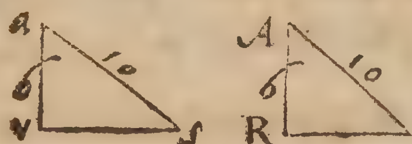


r, erit

r, erit rectus; Nūc ducta recta c r, vel a s, cōsideratisq; duobus triangulis rectangulis a c s, & a r s, cū duo latera c a, a s, vnius sint æqualia duobus lateribus r s, s a, ipsis correspondentibus alterius, sequitur (per id quod hic inferius demonstrabitur) quod reliqui anguli vnius sint æquales reliquis angulis alterius, & reliquum latus c s, vnius reliquo lateri r a, alterius scilicet, vt recta a r, sit æqualis rectæ c s, sibi oppositæ, vt ostendere proponebatur.

Duorum triangulorum rectangulorum, quando duo latera vnius sunt æqualia duobus lateribus ipsis correspondentibus alterius, reliquum latus vnius erit etiam æquale reliquo lateri alterius, & quilibet aliorum angulorū vnius erit æqualis angulo ipsi correspondenti alterius, & triangulum erit æquale triangulo.

IN triangulis rectangulis a r s, & A R S, si duo latera continentia angulum r, rectum vnius essent æqualia duobus lateribus continentibus angulum R, rectum alterius, etiam reliquum latus vnius (per quartam primi) esset æquale reliquo lateri alterius; anguli, angulis, &c. Sed sint r a, & a s, æqualia lateribus R A, & A S; dicitur, quod etiam R S, erit æquale lateri r s; Nam si non essent æqualia, vnum ipsorum esset longius altero, sit ergo (per aduersarium) R S, longius, à quo secetur R t, ad æqualitatem r s, scilicet, ita vt id in quo R S, excedit r s, remaneat à parte S, & R t (per aduersarium) euadat æqualem lateri a r, & ideo cum in duobus triāgulis rectangulis a r s, & A R t, duo latera a r, r s, & angulus r, rectus ab eis contētus, essent æqualia duobus lateribus A R, R t, & angulo R, recto ab ipsis contento, sequeretur (per 4. primi) quod etiam basis A t, esset æqualis basi a s, ideo esset etiā æqualis rectæ A S, (positæ æqualis rectæ a s.) Vnde in triangulo A t S, duo latera A t, A s, essent ad inuicem æqualia, & propterea duo anguli A S t, & A t S, essent ad inuicem æquales, sed A t S, externus trianguli rectanguli A R t, habentis latus R t, productum in S, est maior angulo A R t, interno recto ipsi opposito, & propterea est obtusus, ideo etiam angulus A S t, esset obtusus. Et in triangulo A S t, qđ habet latus S t, productum in R, angulus A t R, qui est externus oppositus angulo A S t, interno, esset maior ipso angulo A S t, obtuso, scilicet esset obtusus, sed angulus etiam A t S, est obtusus, ideo anguli A t R, & A t S, facti à linea A t, cadente super lineam

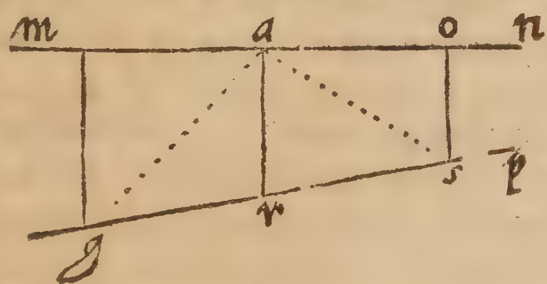


neam R S, essent ambo obtusi, seu quilibet eorum esset maior recto, & propterea summa eorum esset maior duobus rectis, quod impossibile est (per 13. primi) non possunt ergo duo latera r s, & R S, esse ad inuicem inæqualia, ideo erunt æqualia, & consequenter angulus a, erit æqualis angulo A, angulus s, angulo S, & triangulum alteri triangulo.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

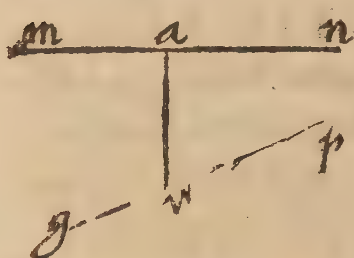
Si super duas rectas datas non æquidistantes ducatur recta, quæ sit perpendicularis primæ, ipsa esse non poterit perpendicularis secundæ, imo cum secunda faciet angulum acutum à parte, in qua lineæ datæ se se appropinquant, & obtusum ab altera parte.

SINT duæ rectæ datæ non æquidistantes m n, & g p, & pars, in qua ipse se se appropinquant sit dextra, scilicet versus n, & p; Et ducta a r, quæ secet vtramq; ipsa cum m n, faciat angulos ad a, rectos, Dicitur quod ipsa a r, cum altera secunda g p, faciet angulos ad r, non rectos, & quod acutus erit a r s, à parte cuius rectę datæ non æquidistantes se se appropinquant. Nam si (per aduersarium) anguli ad r, essent recti, acceptis r g, & r s, æqualibus, & ductis rectis a s, & a g, consideratisq; duobus triangulis a r g, & a r s, quæ essent rectangula (per aduersarium) & ideo angulus r, vnius æqualis angulo r, alterius, & duo latera g r, r a, continentia angulum r, vnius, duobus lateribus s r, r a, continẽtia angulum r, alterius, sequeretur (per 4. primi) quod basis a g, deberet esse æqualis basi a s, & reliqui anguli vnius, reliquis angulis alterius vterq; vtrique. Vnde etiam angulus m a g, qui remanet à recto m a r, esset æqualis angulo n a s, remanẽte à recto n a r. Nunc à punctis s, & g, ductis ad n m, perpẽdicularibus s o, & g t, & consideratis duobus triangulis rectangulis s o a, & g t a, in quibus etiam angulus s a o, vnius esset æqualis angulo g a t, alterius, & latus a s, vnius lateri a g, alterius, sequeretur (per 26. primi Euclidis) quod reliquus angulus a s o, vnius esset æqualis reliquo angulo t g a, alterius, latus o a, lateri t a, & etiam latus s o, lateri g t, sed s o, & g t, quæ sunt perpendiculares ad m n, ostendunt distantiam rectæ g p, ad m n, in duobus diuersis punctis g, & s, & quia essent



 æqua-

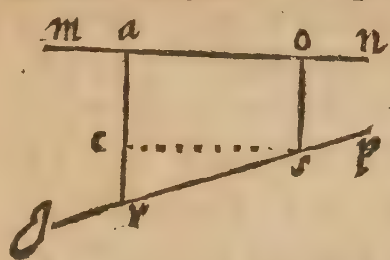
æquales, ſequeretur quod g p, & m n, eſſent æquidiſtantes, quod eſt contra ſuppoſitum, ideo impoſsibile, ergo impoſsibile etiam eſt angulos a r g, & a r p, eſſe rectos, erunt ergo non recti, ſcilicet vnus obtuſus, & alter acutus, vt probare proponebatur; Et acutus erit a r p, ſupponendo rectas m n, & g p, non æquidiſtantes appropinquari verſus n, & p, & remoueri verſus m, & g, (ſupponendo, ſcilicet, quod g t, ſit longior r a, & r a, longior s o, ſcilicet, quod punctum g, magis diſtet à recta m n, quàm punctũ r, & punctũ r, remotius ſit ab ipſa recta m n, quàm punctũ s.) Nam cum rectæ datæ ſint propinquiores à parte n p, quã ab altera parte, ſequitur quod ab ea parte productæ ipſæ tandem concurrerent ſimul, conſtituendo angulum, & ponamus hoc euenire in h, puncto, conſiderato à dicta parte dextra diſtante ab a r, (quæ eſt perpendicularis ad m n,) quantumlibet, & ita duæ a h, & r h, cum a r, ſimul formarent triangulum a h r, cuius latus h a, eſſet productum in m, quare angulus m a r, externus eiuſdem trianguli erit maior angulo a r h, interno illi oppoſito, ſcilicet angulus a r h, erit minor angulo m a r, ſed m a r, eſt rectus (ex hypotheſi; poſita eſt enim a r, perpendicularis ad m n,) ideo angulus a r h, minor illo erit acutus, & angulus a r g, ipſi coniunctus erit obtuſus, vt oſtendere volebamus. Vel in triangulo a h r, conſiderato latere h r, producto in g, angulus externus a r g, erit maior angulo r a h, interno ipſi oppoſito, ſed ipſe internus eſt rectus ideo externus a r g, erit obtuſus, & conſequenter a r p, erit acutus, qui eſt ille à parte, in qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant. Hoc etiam ex ſe (ſine prima ſuperiori demoſtratione, vbi ducitur aduerſarius ad impoſsibile, ſufficere poteſt ad demõſtrandũ oſtenſiuè, quod recta a r, perpendicularis ad m n, non eſt perpendicularis ad g p; nam probatur angulum a r p, dextrum eſſe acutum, & a r g, ſiniſtrum eſſe obtuſum.



Poterit etiam ab initio demonſtrari propoſitio totalis, tali modo. Sint duæ rectæ datæ non æquidiſtantes m n, & g p, quæ magis ſe ſe appropinquant à parte dextra n p, & ſuper ipſas ducta ſit a r, quæ ſit perpendicularis in a, ad primam m n; Dicitur ipſam non poſſe eſſe perpendicularem ad ſecundam g p; imo, quod cum ipſa ſecunda g p; faciet angulum acutum à parte dextra n p, in qua rectæ datæ ſe ſe appropinquant, & obtuſum ab altera parte, ſcilicet,

dicitur

dicitur angulus a r p, esse acutus, & a r g, obtusus. Et ad hoc probandum: Ab alio puncto assumpto in prima m n, seu à parte dextra, ab a, versus n, seu à sinistra ab a, versus m, ponamus à dextra, & sit o, ad eandem primam m n, ducatur perpendicularis o s, tam lõga, vt perueniat etiam ad secundam g p, & sit vt perueniat ad ipsam in s, & tunc duæ rectæ s o, & r a, pependiculares ad m n, ostendent distantiam à duobus diuersis punctis r, & s, signatis in g p, ad m n, quæ duæ perpendiculares r a, & s o, erunt inæquales, quoniã supponitur duas rectas datas m n, & g p, esse non ęquidistantes. Amplius, quoniam dicũtur ipsæ appropinquari à parte dextra, recta s o, dextra vbi distantia illarum est minor, erit breuior sinistra a r, nunc ab hac a r, longior, sumpto principio ab a, vbi facit angulum rectum cum m n, secetur pars a c, æqualis rectæ o s, & ducatur c s, & consideratis duabus rectis c a, & s o, perpendicularib. ambabus ad eandem a o, & æqualibus ad inuicem, quæ sunt simul iunctæ à recta c s, hæc c s, (per quintam huius) erit æquidistans, & æqualis dictæ a o, ideo a c, quæ est perpẽdicularis ad vnam ipsarum æquidistantium a o, erit etiam perpendicularis ad aliam c s. (per secundam huius) scilicet angulus a c s, erit rectus, & quoniam est externus trianguli parui s r c, habentis latus r c, prolungatum in a, ipse erit maior angulo c r s, interno sibi opposito (per 16. primi Euclidis) scilicet angulus c r s, erit minor angulo a c s, recto, ideo ipse c r s, erit acutus, sed hic est angulus factus ab a r, cum recta g p, secunda duarum datarum non ęquidistãtium, se se appropinquantium à parte n p, dextra à qua est angulus iste. ideo cognoscimus a r, non esse perpendicularẽ ad secundã datã g p; imo cum ipsa g p, facere angulũ acutum à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ supponuntur appropinquari, obtusus ergo erit alter a r g, sinister (per 13. primi) à qua parte sinistra duæ rectę datæ non æquidistantes ab inuicem remouentur.



Et si in prima linea m n, esset assumptum punctum t, à parte sinistra, à qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidistantes se se remouent, & ab ipso puncto t, ad m n, ducta perpendicularis t g, perueniens ad g p, in g, tũc (quia ista t g,) esset longior a r, (cum duæ rectæ datę ex hypothesi sint remotiores à parte sinistra, quàm à dextra) ab ipsa t g, incipiendo à puncto t, vbi ipsa facit angulum rectum

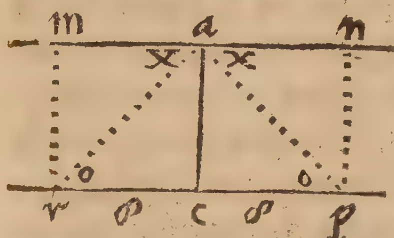


cum m n, ſecaretur pars t d, æqualis rectæ a r, & ducta r d, ipſa (per quintam huius) erit æquidiſtans, & æqualis rectæ a t, quapropter a r, quæ eſt perpendicularis ad a t, erit etiam perpendicularis ad r d, (per ſecundam huius) ſcilicet angulus a r d, erit rectus, vnde angulus a r g, qui eſt maior dicto recto ſua parte erit obtuſus, & ideo a r p, ipſi coniuncto (per 13. primi) erit acutus. Et ita cognoſcimus etiam, quod recta a r, exiſtens perpendicularis ad m n, non poteſt eſſe perpendicularis ad g p, imo facit angulum acutum cum ipſa g p, à parte dextra p, in qua duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & obtuſum à parte ſiniſtra g, in qua ſe ſe remouent, quod oſtendendum erat.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si ſuper duas rectas datas cadat recta, quæ ſit perpendicularis ad ambas, neceſſe eſt, vt ipſæ duæ rectæ datæ ſint ad inuicem æquidiſtantes.

SVper datas m n, & r p, cadat a c, & eueniat, vt quilibet angulorum ad a, & ad c, ſit rectus, dicitur m n, & r p, eſſe æquidiſtantes ad inuicem, quod ſic demonſtratur; Acceptis c p, & c r, æqualibus à punctis p, & r, ad m n, ducantur perpendiculares p n, & r m, vt anguli ad m, & ad n, ſint recti, ducantur quæ r a, & p a; conſideratisq; duobus triãgulis rectangulis r c a, & p c a, duo latera r c, c a, cum ipſorum angulo recto, erunt æqualia duobus lateribus p c, c a, ipſiq; angulo recto, ideo (per quartã primi) r a, erit



æqualis rectæ p a, angulus a r c, angulo a p c, & angulus r a c, angulo p a c, ideo dempto angulo r a c, à recto m a c, & p a c, à recto n a c, duo anguli, qui remanent r a m, & p a n, erunt æquales ad inuicẽ. Et in duobus trtangulis rectangulis r m a, & p n a, quia duo anguli anguli m, & a, vnius cum latere r a, ſunt æquales duobus angulis n, & a, alterius cum latere p a, ſequitur (per 26. primi) quod reliquus angulus m r a, vnius erit æqualis reliquo angulo n p a, alterius, & latus r m, lateri p n, & latus m a, lateri n a, vnde angulus totalis m r c, etiam erit ęqualis totali angulo n p c, quia ergo r m, & p n, perpendicularis ad m n, à duobus diuerſis punctis r, & p, lineę r p, ſunt ad inuicem æquales ſequitur, quod recta r p, ab vtraq; parte ęqualiter diſtet, ſcilicet ſit æquidiſtãs rectæ m n, vt probare volebamus. Cognoſcitur etiam, quod ob eandem rationem, vel cauſam, quia ſu

per

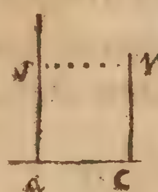
per n p, & a c, cadit n a, ꝑpendicularis ad ambas, ob id ſequitur, q̃d n p, ſit æquidiſtans rectæ a c. Amplius videtur etiam, quod, cum ſuper duas æquidiſtantes m n, & r p, cadant r m, & p n, perpendiculares ad m n, ipſæ erunt etiam perpendiculares ad r p, & ideo angulus m r p, erit rectus, & etiam rectus erit n p r.

Seu ad demonſtrandam ſuperiorem propoſitionem dici poterit Si duæ rectæ m n, & r p, non eſſent æquidiſtantes, illæ eſſent non ęquidiſtantes, & ideo recta a c, quæ eſt perpendicularis ad m n, vna ipſarum non poterit eſſe perpendicularis ad alteram r p, (per ſextā huius) ſed ſuppoſitum eſt, quod ipſa a c, ſit etiam perpendicularis ad r p, ideo a c, non poterit non eſſe perpendicularis ad r p, vnde nec etiam poterit ipſa r p, non eſſe æquidiſtans ad m n, ergo erit ipſi æquidiſtans.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ſuper rectam datam cadant duæ perpendiculares, illæ ad inuicem erunt æquidiſtantes.

SVper datam a c, ſint perpendiculares duæ rectæ a s, & c r, Dicimus illas eſſe ad inuicem æquidiſtantes, quod ſic demonſtratur.



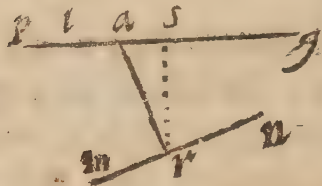
Faciamus ipſas duas perpendiculares æquales (à longiori ſecando partem æqualem minori) & ſit a s, æqualis c r, coniunganturq́; duo puncta r, & s, cũ recta r s, q̃ (per 5. huius) erit æqualis, & ęquidiſtans rectæ a c, anguliq́ue r, & s, erunt recti, vt anguli c, & a (per quartam huius) vnde etiam quælibet duarum rectarum c a, & r s, erit perpendicularis cuilibet rectarum c r, & a s, & ideo quælibet duarum c a, & r s, (per corollarium primæ huius) oſtendet diſtantiam rectæ c r, ad rectam a s, in duobus diuerſis punctis c, & r, ſumptis in recta c r, vel oſtendet diſtantiam rectæ a s, ad rectam c r, in duobus diuerſis punctis a, & s, ſumptis in recta a s, ſed ipſæ c a, & r s, ſunt æquales ad inuicem, ideo etiam duæ c r, & a s (per ſecundam definitionẽ) erũt æqualiter diſtantes, ſeu æquidiſtantes ad inuicem.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si duæ rectæ datæ ſint nõ æquidiſtantes, & à puncto in prima ſignato ducatur perpendicularis ad ſecundam, & à puncto à quo ipſa perpendicularis peruenit ad ſecundam ducatur recta perpendicularis ad primam, hæc vltima perpendicularis erit breuior antecedente perpendiculari, & cadet inter antecedentem, & illam partem, in qua datæ rectæ ſe ſe appropinquant.

Sint

Sint duæ rectæ datæ non æquidiſtantes p g, prima, & m n, ſecũda, quæ ſe ſe appropinquant à parte g n, & à puncto a, in prima ſignato ducatur a r, perpendicularis ad ſecundam, & ita cum angulus a r n, ſit rectus, g a r, erit acutus (per ſextam huius) Nũc à puncto r, ducta recta perpendiculari ad primam p g, ipſa neceſſario cadet inter a, & g, quoniam ſuper ipſam r a, cadere non poteſt quia tunc angulus r a g, eſſet rectus, & iam ſcimus ipſum debere eſſe acutum; nec inter a, & p, cadere poteſt, nam ſi hoc fieri poſſet per aduerſarium, & ponatur peruenire in t, ſcilicet angulum r t a, eſſe rectum, ſequeretur, quod conſiderato triangulo rectangulo r t a, habente latus t a, productũ in g, angulus externus g a r, eſſet minor interno oppoſito a t r, ſcilicet acutus recto, quod eſt impoſsibile, cadet ergo inter a, & g, (ſcilicet à parte perpendicularis r a, in qua rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant) & ſit r s, & ita angulus r s a, erit rectus, ideo maior angulo s a r, acuto, vnde in triangulo rectangulo r s a, quia, angulus a, acutus eſt minor angulo s, recto, etiam latus r s, acuto oppoſitum, erit breuius latere a r, recto oppoſito (per 19. primi Euclidis) ſcilicet recta r s, quæ eſt perpendicularis primæ lineæ, erit breuior recta a r, quæ eſt perpendicularis ſecũdæ.

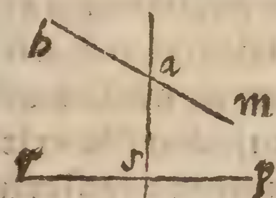


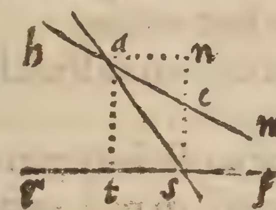
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſecentur à recta, duo anguli interni à parte, in qua rectæ datæ ſe ſe appropinquant ſimul iuncti, ſcilicet ſumma illorum erit minor duobus angulis rectis, ſumma vero duorum angulorum internorum ab altera parte, in qua datæ rectæ remotiores ſunt, erit minor duobus angulis rectis. Item angulus externus à parte, in qua duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, erit minor angulo interno ipſi coalterno ab altera parte; ſcilicet ex coalternis minores erunt illi, qui ſunt à parte, in qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquãt, et maiores illi, qui ſunt ab altera parte, in qua rectæ datæ remotiores euadunt. Item quilibet angulorum internorum à parte, in qua rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, erit minor angulo externo ipſi oppoſito ab eadem parte, ſed ab altera parte, in qua ipſæ rectæ remotiores euadunt, erit contrariũ ſcilicet quilibet duorum angulorum internorum erit maior externo oppoſito à dicta eadem parte.

Super

SVper duas rectas datas h m, & r p, non æquidistantes, imo propinquiores à parte m p, quam à parte h r, ducatur recta a s, vtcunque secans ambas in a, & s; dicitur angulos internos m a s, & p s a, esse minores duobus rectis; quia à puncto a, ducta recta perpendiculari ad r p, ipsa vel cadet in punctũ s, scilicet erit eadẽ cum recta a s, vel trãsibit versum parte r, sinistram, vel versus partem p, dextram. Si ceciderit in punctum s, scilicet vt a s. sit perpendicularis rectæ a p, illa tunc (per sextam huius) cum altera linea h m, inæquidistante rectæ r p, faciet angulum acutum à parte m, dextra, in qua ipsæ non æquidistantes se se appropinquant, & obtusum à parte h, sinistra, à qua se se remouent (scilicet angulus m a s, erit acutus, & ideo iuncto recto p s a, summa (ab hac parte dextra, in qua rectæ non æquidistantes se se appropinquant) erit minor duobus rectis, & angulus h a s, erit obtusus, ideo iuncto recto a r s, summa (à parte sinistra, à qua rectæ non æquidistantes se se remouent) erit minor duobus rectis. Sed si ꝑpendicularis ad r p, discedens à puncto a, perueniat, ad r p, in t, sinistro ad s, tunc à puncto s, ducatur s c, ꝑpendicularis ad ipsam r p; & cum datæ h m, & r p, non sint æquidistantes, imo propinquiores à parte m p, sequitur dictas duas ꝑpendiculares t a, & s c, ad r p, esse inæquales, & breuiorem existere s c, Nũc hęc s c, ꝓducatur vltra ad c, quousq; fiet ęqualis rectę t a, & hoc eueniat in n, scilicet, quod s n, sit æqualis rectæ t a, & ducatur n a, quæ (per quintam huius) erit æqualis, & æquidistans rectæ t s, & ideo cum a n, & t s, æquidistantes sint sectæ à recta a s, angulus n a s, erit æqualis sibi coalterno t s a, scilicet internus superior dexter interno inferiori sinistro (per quartam huius) sed angulus c a s, pars anguli n a s, est minor ipso n a s, ideo erit etiam minor angulo t s a, vnde communiter iuncto angulo a s p, summa duorũ c a s, & a s p (qui sunt duo interni à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ se se appropinquant) erit minor summa duorum t s a, & a s p, sed hæc summa est æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis. Et consequenter alij duo anguli interni sinistri h a s, & r s a, qui remanent è dextris ad quattuor rectos vsque erunt maiores duobus rectis. Et quando recta perpendicularis ad r p, discendens à puncto a, perueniat ad ipsam in t; dextro ab s, tunc à puncto s, ducatur s c, perpendicularis ad eandẽ r p, quod cum datæ h m, & r p, sint non æquidistantes, imo propin-



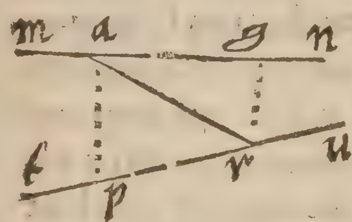


quiores à parte m p, ſequeretur dictas duas perpendiculares s t, & t a, ad r p, eſſe inæquales,& s c, eſſe longiorem t a, Nunc ab hac s c, incipiendo à puncto s, ſecetur pars s n, æqualis rectæ t a,& ducatur a n, quæ(per quintam huius)erit æqualis,& æquidiſtans rectæ s t, quare cũ hæ duæ æquidiſtantes n a, & s t, ſectæ ſint à recta a s, angulus a s t, erit æqualis ſuo coalterno n a s, ſed hic n a s, eſt pars anguli c a s, ideo minor ipſo, ergo etiam a s t, erit minor eodem c a s, vnde communiter iuncto angulo m a s, ſumma duorum t s a, & m a s (qui ſunt duo interni dextri, rectarũ h m, & r p, ſect arum ab a s) erit minor ſumma duorum c a s, & m a s, ſed hæc eſt æqualis duobus rectis (per. 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis . Et per conſequens ſumma duorum angulorũ internorum ſiniſtrorum c a s, & r s a, erit maior duobus rectis.

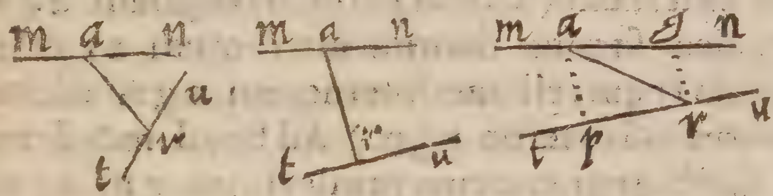
Hæc prima pars huius Propoſitionis poteſt etiam demonſtrari modo ſequenti.

Secet recta a r, duas datas nõ æquidiſtãtes m n,& t u, ſe ſe appropinquãtes verſus n u, quæ a r, cum m n; à parte n, faciet angulum rectum, vel obtuſum, vel acutum. Si rectum, tunc alter internus dexter a r u, erit acutus (per ſextam huius) & propterea ſumma ipſorum duorum internorũ dexterorum n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Si n a r, ſit obtuſus, ab ipſo ſecetur rectus n a g, ducendo ad m n, in a, perpendicularem a g, & ita angulus a g u (per ſextam huius) erit acutus, & ab r, ad m n, ducatur perpendicularis r p (quæ erit longior recta g a) & angulus p r u, erit acutus, & quia g a, & r p, ſunt perpendiculares ad m n, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem (per octauam huius) vnde cum ſint ſectæ ab a r, angulus p r a, erit æqualis ſuo coalterno r a g, & quia ſumma angulorum p r a, & a r g, eſt angulus p r g, acutus, etiam ſumma angulorum a r g, & r a g, erit acutus, vnde ipſis addito recto n a g, ſumma illorũ cum ipſo recto, ſcilicet n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Vel quia ſuper p r, & a g, æquidiſtantes cadit recta t u, angulus externus a g u, acutus, erit æqualis interno oppoſito p r u, ſed hic angulus eſt æqualis ſummæ duorũ a r g, & r a g (quia propterea æquidiſtantiam rectarum p r, & a g, ſectarum ab a r, angulus r a g, eſt æqualis ſuo coalterno p r a,& iſte p r a, cum a r g, componunt

nunt totalem angulum acutum p r g) ideo etiam angulus a g u, acutus, erit æqualis ſummæ duorũ a r g,& r a g, vnde ipſi addito recto n a g, ſumma ipſius acuti cum recto, quæ ſumma eſt minor duobus rectis erit æqualis ſummæ angulorum n a r, & a r u; ſcilicet hi duo anguli interni dextri rectarum m n, & t u, ſectarum ab a r, erunt minores duobus rectis. Et quando angulus n a r, ſit acutus,



tunc ipſi tantum addatur, vt euadat rectus, ſcilicet ducatur ad m n, à puncto a, perpendicularis a p, quouſque perueniat ad t u, & angulus a p u, erit acutus (per ſextam huius) item à puncto r, eidem rectè m n, ducatur perpendicularis r g (quæ erit breuior recta p a.) & angulus g r u, erit acutus, & quia ipſæ duæ rectæ p a, & r g, perpendiculares ad rectam m n, ſunt ad inuicem æquidiſtantes (per octauam huius) & ſectæ ab a r, angulus g r a, erit æqualis ſuo coalterno p a r, & ideo ſumma angulorum g r a,& g a r, erit æqualis ſummæ p a r, & r a g, ſcilicet vni recto, vnde ipſis addito g r u, acuto, sũma triũ g a r, a r g, & g r u (quæ æquipollet duobus internis n a r, & u r a) non perueniet ad duos rectos, ſcilicet erit minor duobus rectis. Vel quando angulus n a r, ſit acutus, tunc a r u, erit acutus, vel rectus, vel obtuſus; ſi acutus, vel rectus, sũma ipſius cũ angulo n a r, acuto erit minor duobus rectis; ſi obtuſus ſecetur ab ipſo angulus rectus g r u, & à puncto a, ducatur perpendicularis a p, ad rectam t u, quæ propterea erit æquidiſtans rectæ r g, & angulus p a n, erit acutus, vt eſt r g n, Angulus p a r, erit æqualis ſuo coalterno a r g, & ideo angulus a r g, ſimul cum angulo



g a r, erunt æquales angulo p a g, ſcilicet ſumma illorum erit minor vno recto (cum p a g, ſit acutus) quæ cum angulo g r u, recto faciẽt ſummam minorem duobus rectis, ſed tres anguli dicti g a r, a r g, & rectus g r u, ſunt æquipollentes duobus n a r, & a r u (quia a r u, continet rectum g r u, & a r g, partes eius totales) ideo cognoſcitur ipſos duos angulos n a r, & a r u, in ſumma eſſe minores duobus rectis, vt oſtendere volebamus. Et per conſequens modo quolibet alij duo m a r, & t r a, interni à parte, à qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent, erunt in ſumma maiores duobus rectis.

COROLLARIVM.

Hinc cognoscitur, quod quando vnum ex lateribus triãguli est productum, angulus externus, qui formatur est æqualis summæ duorum oppositorum internorum in triangulo.

QVIA superius in figura hic rescripta cum probatum sit angulum u g a, esse æqualem angulo u r p, (ob æquidistantiam rectarum r p, & g a, sectarum ab u r; quod u g a, est angulus externus, & p r u, est internus oppositus ab eadẽ parte) & hic u r p, sit æqualis duobus g r a, & a r p, suis partibus, quod est ac si dicamus duobus g r a, & r a g, (cum r a g, sit æqualis suo coalterno a r p, ex æquidistantibus r p, & g a, sectis ab r a) cognoscimus, quod etiã u g a, erit æqualis eisdem duobus g r a, & r a g, qui sunt duo interni oppositi in triãgulo a r g, habente latus r g, productum in u.

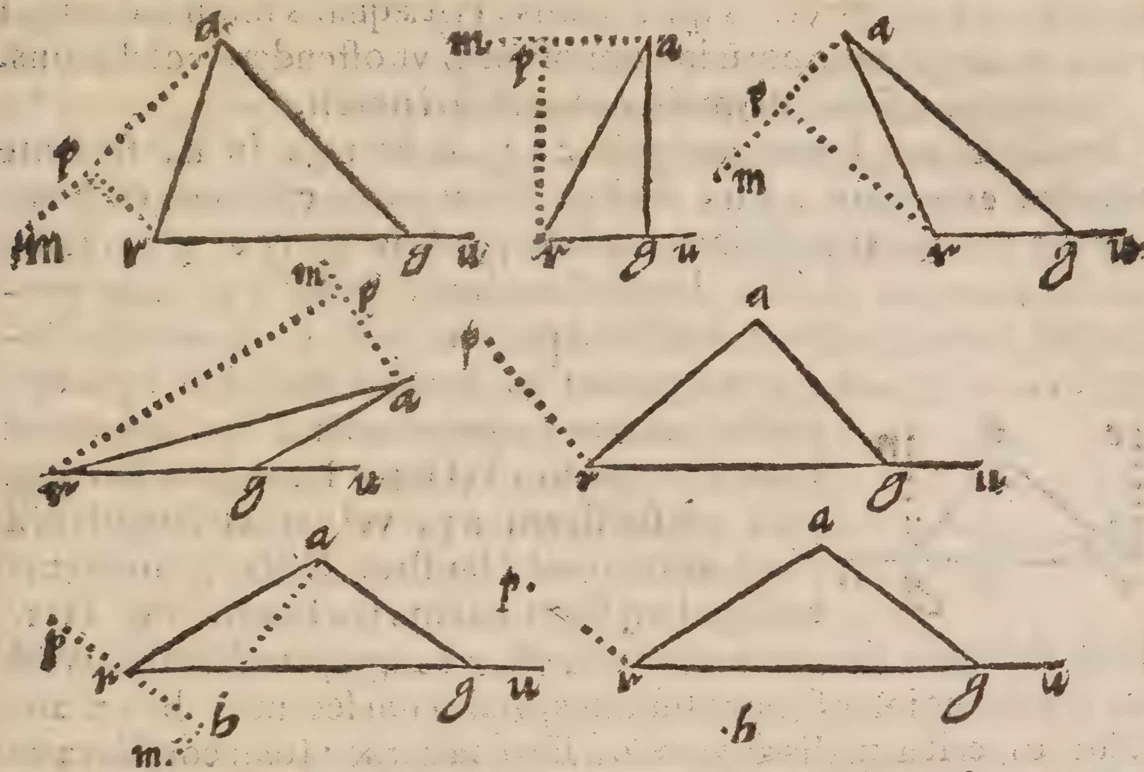
Poterit etiam ostendi ipsa prima pars superioris propositionis, alio modo, si prius demonstretur sequens.

LEMMA.

Cuiuslibet trianguli producto vno latere quouis, angulus externus erit æqualis summæ duorum internorum in triangulo ipsi oppositorum.

TRIANGVLI a r g, productum sit latus r g, in u, constituendo angulum externum (scilicet extra triangulum a g u. Dicitur ipsum esse æqualem summæ duorum internorum a, & r, oppositorum in triangulo (nam reliquus internorum a g r, dicitur coniunctus, seu associatus ipsi externo a g u.) Ad hoc demonstrandum; Ad latus a g, faciẽs angulum cum productione g u, à parte superiori a, versus partem r, ducatur perpẽdicularis a m, Et à puncto r, scilicet ab altera extremitate lateris producti per g, in u, ducatur perpẽdicularis ad a m, & sit r p; Vnde cum quælibet duarũ rectarum r p, & g a, sit perpendicularis ad a m, ipsæ duæ rectæ erunt æquidistantes ad inuicem (per octauam huius) & quia sectæ sunt ab r u, angulus a g u, externus erit æqualis angulo p r g, interno opposito ab eadem parte; Et etiã quia duæ æquidistantes r p, & g a, sectæ sunt ab a r, angulus r a g, erit æqualis suo coalterno p r a, vnde ipsis addito communiter angulo a r g, summæ duorum p r a, & a r g, & ideo totali angulo p r g, erit æqua-

æqualis summa duorum r a g, & a r g, interni in triangulo, sed ei-

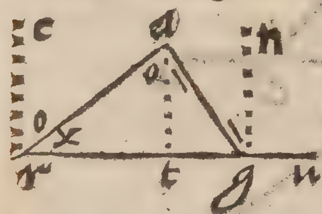


dem angulo p r g, est æqualis externus a g u, ideo ipse a g u; etiam erit æqualis summæ dictorum duorum internorum a, & r. Et si perpẽdicularis, quæ à puncto a, duceretur ad a g, esset a r, scilicet alterum latus trianguli g a r, scilicet, quod angulus a, internus esset rectus, tunc à puncto r, ducta à superiori parte recta r p, perpendiculari rectæ r a, similiter eodem modo diceretur, q existentibus r p, & a g, perpendicularibus eidem a r, ipsæ ad inuicẽ essent æquidistãtes, & propterea cũ sint sectæ à recta u r, angulus a g u, erit æqualis angulo p r g; & etiam cum sint sectæ à recta a r, angulus p r a, erit æqualis angulo a, ideo totus angulus p r g, & ideo a g u, erit æqualis, & angulo a, & angulo a r g, scilicet summæ duorum internorum a, & r; Et si perpendicularis, quæ à puncto a, duceretur ad latus a g, transiret per triangulum, scilicet, vt angulus r a g, esset obtusus, tunc ipsi perpendiculari transeunti per triangulum, & productæ quantum conuenit, ducatur à puncto r, perpendicularis r h, & hæc à parte superiori, scilicet ab r, aliquantulum producatur ad libitum, & sit in p, vsq; & tunc similiter consideratis rectis h p, & g a, perpendicularibus eidem a h, ipse erunt ad inuicem æquidistantes, & cum sint sectæ ab u r, angulus externus a g u, erit æqualis interno illi opposito ab eadem parte p r u. Item duæ dictæ æquidistantes r p, & a g, cum sint sectæ ab a r, angulus g a r, erit æqualis suo coalterno

p r a, ideo addito cõmuniter a r g, totalis angulus p r g, & ideo angulus a g u, externus ipſi æqualis, erit æqualis ſummæ duorum g a r, & a r g, internorũ ipſi oppoſitorũ, vt oſtendere volebamus.

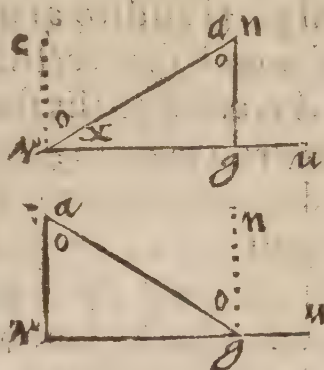
Idem etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt.

Producto vno latere trianguli a r g, & ſit r g, in u, faciente angulum externum a g u, dicitur ipſe angulus externus eſſe æqualis duobus angulis internis ſibi oppoſitis g a r, & g r a, ſimul iunctis trianguli; Ad hoc demonſtrandum. Super r g, latus productum quantũ occurrit, ducãtur à punctis r, & g, perpendiculares r c, & g n, & etiam à puncto a, ſeu ab angulo ipſi r g, oppoſito ducatur perpendicularis a t, quæ cadet intus triangulum, vel ſuper latus dextrum a g, vel ſuper ſiniſtrum a r, vel extra triangulum à parte dextra, vel à ſiniſtra. Cadat primo intus triangulum ſuper baſim, ſeu lineam r g, in t.



Et conſideratis duabus rectis a t, & r c, perpendicularibus ad r t, illæ erunt inter ſe æquidiſtantes, vnde cum ſecentur ab a r, angulus o, erit æqualis angulo o, ſuo coalterno; Item conſideratis duabus g n, & t a, perpendicularibus ad rectam t g, illæ erunt æquidiſtantes ad inuicem, & quia ſecantur ab a g, angulus - erit æqualis ſuo coalterno - vnde totalis angulus a, ſeu r a g, erit æqualis duobus c r a, & n g a, & communiter addito angulo x, ſumma totius anguli a, cum x, ſcilicet duorum internorum a, & r, in triangulo r a g, erit æqualis tribus angulis c r a, a r t, & n g a, ſed duobus c r a, & a r t, conſtituentibus rectum c r t, eſt æqualis angulus n g u, (vel quia eſt rectus, vel quia conſideratis duabus rectis r c, & g n, perpendicularibus eidem r g, & propterea æquidiſtãtibus ad inuicem, ſectæ à recta r u, angulus n g u, externus eſt æqualis angulo c r u, interno ipſi oppoſito ab eadem parte) ideo huic n g u, addito a g n, & ſic conſtituitur totalis externus a g u, ſumma, ſcilicet hic a g u, eſt quantum tres dicti anguli, & ideo quantum duo interni g r a, & g a r; Cadat nunc perpendicularis, quæ à puncto, ſeu à ſummitate a, trianguli (oppoſita lateri r g, ipſius producti) perueniat ad dictã baſim, ſeu lineam productam ſuper latus dextrum a g, ſcilicet ſit vna, & eadem linea cum latere a g, quod latus ob hoc faciet angulos rectos cum recta r u, & erit etiam vna, & eadem linea cum illa, quæ à puncto g, duceretur perpendicularis rectæ r g; & quia, & hæc g a, & r c, ſunt perpendiculares rectæ r u, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem, & cum ſecẽtur à recta u r, angulus externus u g a, (qui nunc eſt rectus)

ctus) erit æqualis interno ipſi oppoſito c r u, Et quia etiam eædem æquidiſtantes g a, & r c, ſunt ſectæ ab r a, angulus o, erit ęqualis angulo o, ſibi coalterno, quapropter addito communiter angulo x, totus angulus c r g, & ideo externus a g u, erit æqualis duobus o, & x, ſeu g a r, & g r a, internis in triangulo oppoſitis angulo u g a. Et ſi ab a, ducendo perpendicularem ad rectam r g, ipſa cadat in r, ſcilicet ſit vna cum latere a r, & ideo ſit illa ipſa linea etiam, quæ à puncto r, ſe extolleret perpendiculariter ad r g, tunc, quia hæc, & g n, perpendicularis ad eandem r g, in g, erunt ad inuicem æquidiſtantes, & ſectæ ab a g, angulus a, erit æqualis angulo a g n, ſibi coalterno, vnde communiter addito angulo r, anguli a, & r, interni trianguli erunt æquales angulis r, & a g n, ſed n g u, eſt æqualis angulo r, ideo ipſe n g u, cum angulo a g n, & conſequenter totus externus a g u, ab illis formatus, erit æqualis angulis a, & r, internis oppoſitis in triangulo ſimul ſumptis.



Et quando à puncto a, ducta recta perpendiculari rectæ r g, ipſa cadat extra triangulum ponamus à parte dextra in d, ſuper productione g u, tunc conſideratis duobus rectis c r, & a d, ꝑpendicularibus rectę r u, & ideo æquidiſtantibus ad inuicem ſectis à recta r a, dicetur angulus c r a, eſſe æqualis ſuo coalterno d a r, & communiter addito a r g, totus c r d, rectus erit æqualis duobus d a r, & a r g, & ideo etiam angulus n g d, rectus, æqualis c r d, erit æqualis eiſdem duobus d a r, & a r g, Nunc conſideratis duabus rectis g, n, & d a, perpendicularib. rectæ r u, & ideo ęquidiſtantibus ad inuicem ſectis à recta g a, angulus n g a, erit æqualis ſuo coalterno d a g, vnde ab angulo n g d, recto, dempto n g a, eius parte (& remanebit a g d) & à ſumma duorum a r g, & d a r, dempto angulo d a g, parte anguli d a r (& remanebunt g a r, & a n g) reſiduum ab vna parte erit æquale reſiduo ab alia, ſcilicet ſolus angulus a g d, qui eſt externus trianguli erit æqualis duobus g a r, & a r g, qui ſunt interni ipſi oppoſiti in ipſo triangulo. Et ſi perpendicularis ad baſim, ſeu latus productum trianguli ducta à puncto a, cadat extra triangulum à parte ſiniſtra ponamus in d (ſupponendo, quod recta g r, ſit producta ab ipſa parte ſiniſtra r, quãtum ſufficit, vt poſsit recipere dictam perpendicularem a d) Conſi

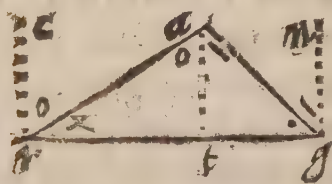
deratis

deratis duabus rectis d a, & r c, perpendicularibus rectę d u, & ideo æquidistanlibus ad inuicem, sectis à recta a r, videbitur angulus d a r, esse æqualis suo coalterno c r a, & vni parti addito angulo a d r, & alteri parti addito angulo c r g, qui anguli sunt recti, & ad inuicem æquales, summa duorum r a d, & a d r, erit æqualis summæ duorum c r a, & c r g, scilicet totali a r g (interno in triangulo) ab ipsis composito, & amplius cuilibet parti addito communiter angulo g a r, summa ab vna parte, scilicet tres anguli a d r, r a d, & g a r, quod est, ac si dicamus duos angulos a d r, & g a d (quia g a d, continet in se præcisè angulos r a d, & g a r) erit æqualis summæ alterius partis, scilicet duobus internis a r g, & g a r; Et quia angulus n g a, est æqualis angulo g a d (suo coalterno in lineis g n, & d a, perpendicularibus rectæ d u, & ideo æquidistantibus ad inuicem sectis à recta g a) & angulo a d r, recto est æqualis angulus n g u, rectus, sequitur ꝙ etiam summã horũ duorum n g a, & n g u, & ideo totalis angulus a g u, externus (trianguli) ab ipsis formatus sit æqualis summę eorundem duorum a r g, & g a r, internorum in triangulo oppositorum, quod opportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis perspicuum est. Tres angulos cuiuscunque trianguli simul sumptos esse æquales duobus rectis.

QVoniam cum notum sit angulum externum (vno latere quouis producto) esse æquale duobus internis, & oppositis, & quia ipse internus simul cum reliquo interno ipsi coniuncto semper componit summã æqualem duobus rectis (per 13. primi) sequitur, quod etiam duo interni dicti cum ipso reliquo interno, scilicet quod omnes tres anguli interni trianguli sint æquales similiter duobus rectis.



Vel (& sit in triangulo a r g) ponamus esse basim vnum ex lateribus, vel vnam & lineis ipsius trianguli, super quam posſit cadere in triangulum perpendicularis ab angulo opposito ipsi lateri, & sit latus r g, & à puncto a, ducta perpẽdiculari a t, lateri r g, & etiam à punctis r, & g, terminantibus basim, ductis perpendicularibus r c, & g n, ipsi basi; quia ex duobus partibus anguli a, pars t a r, est æqualis angulo c r a, & ipse c r a, cum a r t, sinistro interno super basim ꝓpositi trianguli a r g, componunt, vel constituunt rectum c r t, scimus etiam dictum a r g, sinistrum cum parte sinistra r a t, anguli r a g, necessario esse æqualem

lem vno angulo recto. Similiter alia pars dextra g a t, anguli r a g, est æqualis angulo n g a, & ipse n g a, cum angulo a g t, dextro interno, super basim propositi triãguli a r g, cõponũt rectum n g t, quapropter videmus etiam dictum a g r, dextrum, cum parte dextra g a t, anguli r a g, necessario esse æqualẽ vni recto, vnde totus angulus r a g, simul cum duobus a r g, & a g r, scilicet tres anguli propositi trianguli erunt necessario æquales duobus angulis rectis.

Nunc ad demonstrandum supradictam primamp artem decimæ Propositionis, superiori medio; poterit dici.

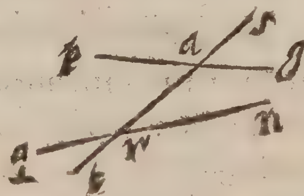
SECET a r, duas rectas non æquidistantes p g, & q n, quæ se se appropinquãt à parte dextra g n; Dicitur, summa duorum angulorum internorum dextrorum, scilicet à parte, in qua ipse se se appropinquant simul iunctorum esse minor duobus rectis. Ad hoc demonstrandum; A puncto a, ad rectam q n, vel à puncto r, ad rectam p g, ducatur perpẽdicularis r t, & sit quod perueniat ad p g, in t, à parte sinistra ab a, & tunc considerato triangulo rectangulo a t r, cuius latus t a, est productũ in g, scimus angulum g a r, externum ipsius trianguli esse æqualem summæ duorum a t r, & a r t, internorum oppositorum, ideo communiter addito angulo n r a, summa angulorũ g a r, & n r a, erit æqualis summæ trium angulorũ a t r, a r t, & a r n, seu summæ duorum a t r, & t r n, (ponẽdo angulum t r n, loco duorum a r t, & a r n, partes ipsius, quæ componunt ipsum totaliter) sed summa duorum a t r, & t r n, est minor duobus rectis, nam cum a t r, sit rectus t r n, est acutus (per sextam huius) quapropter etiam summa duorum g a r, & n r a, internorum dextrorum linearum datarum non æquidistantium est minor duobus rectis. Et si à puncto r, ducta perpẽdiculari ad rectam p g, ipsa caderet à parte dextra ab a, & esset r t, alterius figuræ, tunc considerato triangulo a t r, rectangulo, habente latus a t, productum in g, angulus g t r, externus erit æqualis duobus internis t a r, & t r a, ideo communiter addito angulo t r n, summa trium t a r, t r a, & t r n, & ideò duorum t a r, & a r n, (posito a r n, loco duorum t r a, & t r n, partes ipsius) erit æqualis summæ duorum g t r, & t r n, sed summa horum est minor duobus rectis (cum g t r, sit rectus per constructionem, & ideo t r n, acutus (per sextã huius) quapropter

etiam ſumma duorum t a r, & a r n, internorum dextrorum duarum datarum linearum non æquidiſtãtium ſe ſe appropinquantium à dicta parte dextra erit minor duobus rectis. Et ſi à puncto r, ducta perpendiculari ad rectam p g, perueniſſet in a, ſcilicet, quod eadem ſecans a r, eſſet perpẽdicularis ad p g, tunc, quia (per ſextam huius) exiſtente angulo g a r, recto, angulus a r n, eſſet acutus (cum ex hypotheſi datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquent ab ipſa parte) clarè perſpicitur ſummam ipſorum duorũ angulorum g a r, & a r n, ſcilicet vnius recti, & vnius acuti eſſe minorem duobus rectis. Vel quando a r, ſit perpendicularis ad rectã p g, (ſcilicet ad vnam duarum datarum non æquidiſtantium) ſcilicet exiſtente angulo g a r, recto, tunc à puncto a, ducta perpendiculari ad rectam q n, (quæ per nonam huius) ſecabit angulum g a r, ſcilicet cadet à parte dextra à puncto r, in qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & erit breuior recta a r) & ſit a m, quod angulus a m n, erit rectus, & cum ſit externus trianguli a r m, habentis latus r m, productũ in r, erit æqualis ſummæ duorum internorum oppoſitorum r a m, & a r m, ideo communiter addito angulo g a m, qui eſt acutus, ſcilicet pars recti g a r, ſumma ab vna parte, quæ eſt trium angulorum a r m, r a m, & g a m, & ideo duorum a r m, & g a r, (poſito g a r, loco duarum eius partium r a m, & g a m, quæ integrè ipſum componunt) erit æqualis ſummæ duorũ a m n, & g a m, ſed hæc ſumma eſt minor duobus rectis, quia vnus eorum a m n, eſt rectus, alter vero g a m, acutus, quare ſimiliter ſumma illorũ g a r, & a r n, internorum dextrorum, linearum datarũ non æquidiſtantium erit minor duobus rectis.

Sed facile etiam veritas eiuſdem primæ partis decimæ Propoſitionis oſtendi poterit, hoc modo.

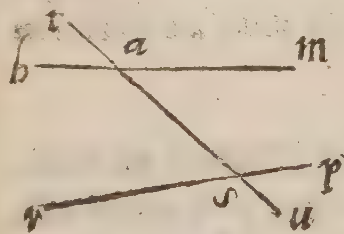
Quia duæ datæ non æquidiſtantes p g, & q n, ſectæ ab a r, ſe ſe appropinquant à parte g n, ipſæ conſiderentur productæ, quantum ſufficit, vt ſe ſe cõtinuo magis appropinquantes tandẽ concurrãt, & ſupponatur cõcurſus in b, Vnde conſiderato triangulo b a r, & vno ex eius lateribus b a, vel b r, pro-

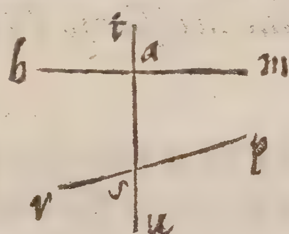




b r, producto in p, vel in q, (vel latere a r, producto in s, vel in t,) ponamus b a, in p; sequitur, quod angulus externus p a r, sit maior angulo a r b, interno opposito, Vel ob hoc, quod angulus s a b, æqualis angulo p a r, (per 15. primi) sit maior dicto a r b, quapropter addito communiter angulo b a r, summa duorum p a r, & b a r, Vel duorum s a b, & b a r, quæ summa est æqualis duobus rectis (per 13. primi) erit maior summa duorum b a r, & a r b, scilicet sequitur, quod summa horũ g a r, & a r n, internorum dextrorum sit minor duobus rectis, sed quattuor interni simul sumpti, sunt æquales quattuor rectis, ideo summa duorum reliquorum p a r, & q r a, qui sunt à parte sinistra, à qua lineæ datæ remotiores euadunt erit maior duobus rectis.

Nunc quod angulus internus à parte dextra, in qua duæ datæ non æquidistantes supponuntur ad inuicem appropinquari, sit minor interno ipsi coalterno ab altera parte, scilicet, quod a s p, sit minor angulo h a s. Vel quod m a s, sit minor angulo a s r, facilè probatur, quia cum ex demonstratis notum sit, summam duorum internorum dextrorum m a s, & a s p, esse minorem duobus rectis, & (per 13. primi) summam duorum m a s, & h a s, esse æqualem duobus rectis, dempto ab vtraq; summa angulo m a s, communi, reliquus angulus a s p, ab vna parte, erit minor reliquo h a s, ab altera.





Et similiter quia summa duorum r s a, & a s p, est æqualis duobus rectis, & ideo maior summa duorum m a s, & a s p, quæ est minor duobus rectis, dempto ab vtraq; parte communi angulo a s p, remanebit angulus r s a, maior angulo m a s, seu m a s, minor angulo r s a, ipsi coalterno ab alia parte sinistra. Eodẽ modo perspicuum fiet quemlibet angulorum internorum dextrorum, scilicet à parte, in qua duæ datæ non æquidistantes se se appropinquant esse minorem interno sibi opposito ab eadem parte, quia quo ad m a s, internum superiorem dextrum, summa eius cum angulo a s p, est minor duobus rectis, & ideo minor summa duorum a s p, & p s u, quæ est æqualis duobus rectis, vnde dempto cõmuni angulo a s p; solus m a s, internus erit minor solo p s u, externo; Vel quia m a s, est minor angulo a s r, sibi coalterno, erit etiã minor angulo u s p, æquali (per 15. primi) dicto coalterno a s r. Idem dicitur de angulo a s p, respectu anguli t a m. Et postea, quod ab altera parte

finiſtra, à qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent, conuerſo modo eueniat, quod quilibet duorum angulorum internorum ſit maior externo oppoſito ab eadem parte, ſimiliter patet, quoniam, quo ad a s r, ipſe cum angulo h a s, facit ſummam maiorem duobus rectis (per primam partem huius) ſed eidem h a s, addito angulo t a h, ſumma, quæ componitur eſt tantum æqualis duobus rectis, & ideo illa ſumma eſt maior iſta, vnde etiã ſolus angulus a s r, internus finiſter erit maior ſolo angulo t a h, externo ſiniſtro ſibi oppoſito. Eodem modo etiam probatur alium angulum h a s, internũ ſiniſtrum eſſe maiorem alio externo ſiniſtro oppoſito r s u, Quod eſt, quod demonſtrare volebamus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Si ſuper duabus rectis datis, ducta ſit recta, quæ ſecet ambas, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte ſit æqualis duobus rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte ſit æqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet angulo ſibi coalterno; Vel quod externus ſit æqualis interno oppoſito ab eadem parte, tunc neceſſario duæ rectæ datæ ad inuicem erunt æquidiſtantes.

QVONIAM ſi duæ rectæ datæ non eſſent æquidiſtantes ad inuicem, illæ eſſent non æquidiſtantes, ſed non æquidiſtantes eſſe non poſſunt, quia tunc (per 10. huius) oporteret, quod ſumma duorũ angulorũ internorũ ab eadẽ parte eſſet minor, vel maior duobus rectis; Et quod internus ſuperior ab vna parte eſſet inæqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet ſuo coalterno. Et quod externus eſſet inæqualis interno oppoſito ab eadem parte; Quod totum eſt contra ſuppoſitum; cum ergo rectæ datæ eſſe non poſsint non æquidiſtantes, erunt æquidiſtantes ad inuicem, vt demonſtrandum erat.

☞ Notandum eſt ſupradictam 11. Propoſitionem, oſtendere idẽ, quod oſtenditur in 27. & 28. primi Euclidis.

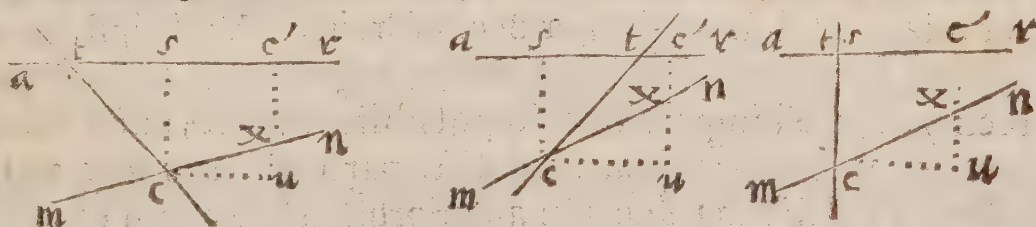
THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si duæ rectæ lineæ datæ ſecentur à recta, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab vna parte ſit maior, vel minor duobus angulis rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte

parte

parte sit inæqualis interno inferiori ab altera parte (qui sunt coalterni ad inuicem;) Vel quod externus sit inæqualis interno opposito ab eadem parte, tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidistantes ad inuicem; Et se se appropinquabũt à parte, in qua anguli interni simul iuncti sunt minores duobus rectis; Seu in qua (quod est idem) internus est minor altero interno ipsi coalterno; Seu in qua (quod similiter est idem) internus est minor externo ipsi opposito ab eadem parte.

QVIA duæ rectæ datæ supradictas cõditiones habentes non possunt esse æquidistantes: nam tunc (per quartam huius) necessario summa duorum angulorum internorum ab eadem parte esset æqualis duobus rectis; Internus esset æqualis interno ab altera parte sibi coalterno; Et externus esset æqualis interno opposito ab eadem parte, quæ omnia sunt contra suppositionem. Cum ergo non posSint esse ad inuicem æquidistantes erunt non æquidistantes, vt demonstrare volebamus. Quod vero duæ rectæ datæ magis propinquæ sint à parte, in qua summa duorum angulorum internorum est minor duobus rectis, ita demonstrari potest. Cum rectæ datæ a r, & a m, sectæ sint à recta t c, & duo anguli interni r t c, & n t c, à parte dextra minores sint duobus rectis (quod tali pacto duo interni sinistri erunt maiores duobus rectis, quoniam omnes quattuor interni semper sunt æquales quattuor rectis) dicitur, quod ipsæ duæ rectæ datæ magis se se appropinquant à parte dextra; nam vt duo anguli interni dextri simul sumpti euaderent æquales duobus rectis existẽte superiori r t c, oporteret maiorem facere inferiorem t c n, ipsi addendo, quod deficit ab illorum summa ad complementũ duo-

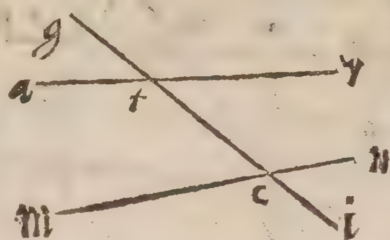


rum rectorum. Et manente linea t c, oporteret à puncto c, ducere rectam, quæ cum recta t c, constitueret angulum maiorem angulo t c n, quantum opus esset, & ob hoc ipsa recta ducenda transiret, subtus rectam c n, & sit c u, (quæ reperietur ducendo à puncto c, perpendicularem c s, rectæ a r, & à puncto c, ad hanc c s, perpendicularem c u) & à puncto in ipsa c u, signato, ponamus à puncto u, ducatur perpendicularis u e, ad rectam a r, quæ

secabit

secabit rectam c n, positam inter c u, & s r, & sit x, punctum sectionis, scilicet scribatur x, in puncto sectionis, & ob hoc pars x e, ipsius, erit breuior totali u e, & ideo erit etiam breuior recta c s, ipsi u e, æqualis (nam cum duæ rectæ s r, & c u, sint æquidistantes ad inuicē (per 7. huius, qa sectæ sunt à recta s c, quæ facit angulos rectos cum qualibet illarū, scilicet, quæ est perpendicularis vnicuiq; ipsarū) & rectæ c s, & u e, perpēdiculares rectæ a r, & ideo ēt perpendiculares rectæ c u, (p 2. huius) ostēdentes distantiam vnius ab altera, & cum ipsæ distātiæ sint ad inuicem æquales (propter æquidistantiam dictam rectarum s r, & c u) conuenit, vt c s, & u e, quæ ostendunt ipsas æquales distātias sint ad inuicem æquales) quapropter propinquior est m n, rectæ a r, in x, quàm in c, Vnde ipse se se appropinquant à parte x, scilicet à parte dextra, vt volebamus probare; Et consequenter se se remouēt à parte sinistra, nam c s, distantia sinistra est longior recta x e, distantia dextra inferioris lineæ m n, ad superiorem a r, in duobus diuersis punctis c, sinistro, & x, dextro. Item, quod duæ rectæ datæ se se appropinquent à parte, in qua summa duorum angulorum internorum est minor duobus angulis rectis, potest probari tali modo. Si duæ rectæ datæ, & iam probatæ non æquidistantes, & quod necessario ab vna parte se se appropinquant, & ab altera se se remouent, non se se appropinquassent à parte vbi anguli sunt minores duobus rectis, opus esset, quod ille se se appropinquassent ab altera parte, vbi summa duorum angulorum internorum est maior duobus rectis, & se se remouissent à parte (& sit dextra) vbi summa duorum angulorū internorum est minor duobus rectis; Sed summa duorum angulorum internorum à parte vbi lineæ non æquidistantes se se remouent est semper minor duobus rectis (per decimā huius.) Vnde ipsi duo anguli interni dextri eodem tempore essent minores, & maiores duobus rectis, quod est impossibile, impossibile ergo est, quod duæ rectæ datæ non se se appropinquent à dicta parte dextra, ideo ab ipsa parte dextra vbi summa duorum angulorum internorum est minor duobus rectis se se appropinquant, se se remouēdo ab alia parte vbi summa angulorum internorum est maior duobus rectis. Quo ad angulos internos coalternos. Si in duabus rectis datis a r, & m n, sectis à recta t c, occurrat angulum r t c, internum superiorem dextrum esse minorem angulo t c m, interno inferiori sinistro ipsi coalterno (vel quod t c n, internus inferior dexter, sit minor angulo a t c, interno superiori sinistro ipsi coalterno) hoc etiam nobis ostendet, quod ipsæ lineæ (iam cognitæ non æquidistātes ob inæquali-

qualitatem dictorum angulorum coalternorum) magis se se appropinquant ab ipsa parte, vbi angulus est minor, quoniam si tàm angulo r t c, minori, quàm angulo t c m, ipsi maiori fingatur additus angulus t c n, summa duorum r t c, & t c n, qui sunt interni ab vna eadem parte dextra, erit minor summa duorum t c m, & t c n, sed hæc summa est æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo summa dictorum duorum internorum dextrorum erit minor duobus rectis, vnde per primam partem huius Propositionis iam demonstratam, sequitur quod ab eadem parte dextra duæ datæ a r, & m n, se se appropinquent, & ab alia se se remoueant. Et similiter, quo ad externum, & internum oppositum ab eadem parte, si notum fuerit, quod angulus internus r t c, sit minor externo i c n, ipsi opposito ab eadem parte dextra, vel quod t c n, sit minor externo g t r; similiter concluderemus, quod duæ datæ a r, & m n, (iam cognitæ non æquidistantes ob inæqualitatem dictorum angulorum internorum, & externorum oppositorum ad inuicem ab eadem parte) se se appropinquarent à dicta parte dextra, quia cum t c n, sit minor angulo g t r, si tàm vni, quàm alteri mente iungatur angulus c t r, summa ipsius cũ angulo t c n, erit minor summa ipsius cum angulo g t r, sed summa cum g t r, est æqualis duobus rectis, ideo summa cum t c n, erit minor duobus rectis, & quia hæc summa angulorum t c n, & c t r, comprehendit duos angulos internos dextros, sequitur (per primam partem iam probatam huius Propositionis) quod ab ipsa parte dextra datæ a r, & m n, debeant se se appropinquare, & se se remouere ab altera parte sinistra.

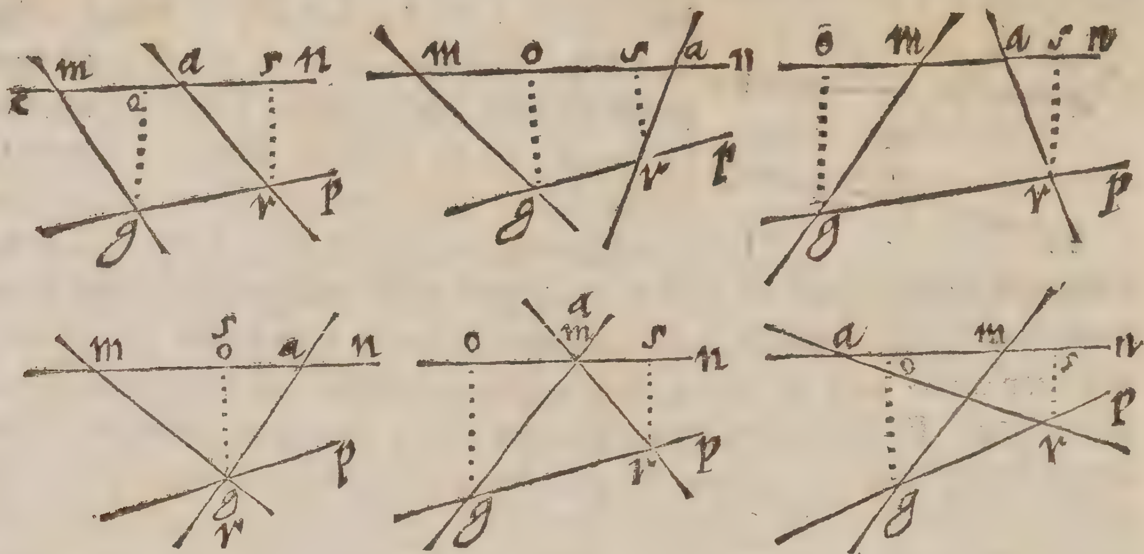


THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si super duas rectas datas ducantur lineæ secantes, summa duorum angulorum internorum ab vna eadem parte, quos faciet vna secantium cum duabus datis, erit æqualis summæ duorum internorum angulorum, quos ab eadem parte, faciet qualibet alia secans cum ijsdem duabus datis.

SI duæ rectæ datæ sint æquidistantes, quia quælibet recta, quæ secet ipsas facit summam duorum angulorum internorum cum ipsis datis æqualem duobus rectis semper (per quartam huius) clarum

rum est, quod proponitur. Sed si duæ datæ sint non æquidistantes, ponamus m n, & g p, sectæ ab a r, & m g, ita probabimus



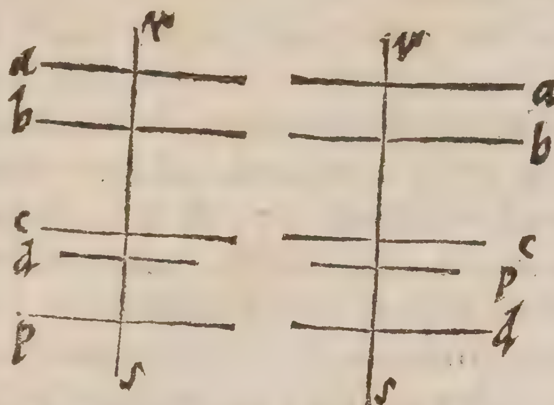
quantum proponitur; Ductis perpendicularibus g o, & r s, alteri datarum à duobus punctis sectionis in alia, quæ duæ perpendiculares erunt ad inuicem æquidistantes (per octauam huius) & propterea summa duorum angulorum dextrorum internorum a o g, & o g r, factorũ ab vna, cum duabus datis, erit æqualis summæ duorum angulorum internorum similiter dextrorum n s r, & s r p, factorum ab altera cum ijsdem duabus datis (cum angulus a o g, per se sit æqualis angulo n s r, & angulus o g r, angulo s r p, per quartam huius.) Quia postea illis æquãtur duo s m g, & m g r; interni facti ab vna secantium cum duabus datis à parte dextra, & duobus alijs æquantur duo s a r, & a r p, interni facti ab altera secante, cum ijsdem duabus datis ab eadem parte dextra (& hoc totũ ob demonstratis in prima parte decimæ huius) sequitur, quod summa duorum angulorum factorum ab vna secantium sit æqualis summæ duorum factorum ab altera secante ab eadem parte dextra cum duabus datis; Et consequenter, quod summa duorum angulorum internorum factorum à parte sinistra cum duabus datis ab vna secante, erit æqualis summæ duorum internorum factorum ab eadem parte sinistra cum duabus datis ab alia secante, quoniam tàm isti, quàm illi sunt, quod remanet à dextris, vsq; ad quattuor rectos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si quotquot rectæ lineæ datæ sint æquidistantes vni rectæ propositæ, ipsæ erunt æquidistantes ad inuicem.

Sit

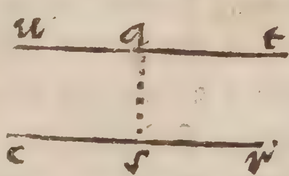
SIT quæcumque datarũ a b c d, æquidiſtans propoſitæ p. Dicitur ipſas eſſe ad inuicem æquidiſtantes; Nam poſita ad libitum vna recta perpendiculari ad propoſitam, & hæc producatur quouſq; ſecet quamcunq; datarum (ipſis etiã productis, ſi occurrat quouſq; perpendicularis propoſitæ lineæ eas ſecare poſſit) & ſit r s, illa (per ſecundam huius) erit etiam perpendicularis cuicunq; datarum, vnde (per ſeptimam huius) quæcunq; datarum erit æquidiſtans cuicunque alteri ipſarum datarum, ſcilicet recta a, cuicunque aliarum, ſimiliter b, cuicunque aliarum, & ſic c, ad d, & ad quaſcunque alias rectas æquidiſtantes rectæ p, propoſitæ.



PROBLEMA. PROPOSITIO XV.

A dato puncto ducere rectam æquidiſtantem ad propoſitam rectam, quæ non ſit in directum cum ipſo puncto dato, ſcilicet talis ſit, vt ſi à puncto dato duceretur linea ad vnum terminorum propoſitæ, illa non vniatur cũ propoſita, ſed faciat angulũ cum ipſa.

A DATO puncto a, ducenda ſit recta æquidiſtans rectæ propoſitæ c r. Ab ipſo puncto a, ducatur recta perpendicularis ad rectam c r, (producendo ipſam c r, quando opus ſit, tali modo, vt ipſa perpendicularis ſuper eam cadere poſsit, ita vt illa ſecari poſsit à dicta perpendiculari) & ſit a s, & ab eodem puncto dato a, ducatur perpendicularis ad hanc a s, ſeu à parte ſiniſtra, ſeu à dextra ad libitum, & ſit a u, vel a t, quæ a u, vel a t, ſeu u t, erit æquidiſtans rectæ c r, vt volebamus (per ſeptimam huius) cum à cõſtructione, vna, & eadem recta a s, ſit perpendicularis propoſitæ c r, & a u, vel a t, ſeu totali u t, vel poſſumus dicere rectam u t, eſſe æquidiſtantem rectæ c r, (per 11. huius) cum quicunque angulorum ab a, & ab s, ſit rectus, & ideo cum ſumma duorum angulorum t a s, & r s a, internorum dextrorum, vel cum ſumma duorum u a s, & c s a, internorum ſiniſtrorũ ſit æqualis duobus rectis. Vel alio modo; A pũcto da-



cto dato a. Ducatur rectam ad libitum, quæ perueniat ad propoſitam c r, & ſit a s, poſtea ab eodem puncto a, à parte dextra





ducatur recta a t, quæ cum recta a s, faciat angulum æqualem angulo a s c, ſiniſtro formato ab a s, & s c, Vel poſtea ab eodem puncto a, à parte ſiniſtra ducatur recta a u, quæ cum a s, faciat angulũ æqualem angulo a s r, dextro, formato ab a s, & s r, nam ita cũ ſint duo anguli t a s, & a s c, coalterni, vel duo u a s, & a s r, ſimiliter coalterni (duarum rectarum u t, & c r, ſectarum ab a s) æquales ad inuicem, recta u t, ducta, aut tranſiens per punctum a, datum, erit (per 11. huius) æquidiſtans rectæ c r, propoſitæ. Vel alio modo; A dato puncto a, ducta recta, quo quomodo, quæ perueniat ad c r, propoſitam, ipſa producatur à parte ſuperiori puncti a, quantumlibet, ponamus in x, poſtea à puncto a, ducatur recta a t, quæ à parte dextra cum recta a x, faciat angulum æqualem angulo a s r, quem ab ipſa parte dextra facit recta a s, ducta cum recta s r. Vel (quod idem eſt) poſtea à puncto a, ducatur recta a u, quæ à parte ſiniſtra cum a x, faciat angulum æqualem angulo a s c, quem ab eadem parte ſiniſtra facit recta a s, ducta cũ recta s c, & ita conſideratis duabus rectis u t, & c r, ſectis à recta x s, quia angulus externus x a t, dexter, eſt æqualis interno a s r, ipſi oppoſito ab eadem parte, Vel quia angulus externus x a u, ſiniſter eſt æqualis interno a s c, ipſi oppoſito ab eadem parte, ſciemus (per 11. huius) quod duæ rectæ u t, & c r, ſunt æquidiſtantes ad inuicem. Et ſi nolemus producere rectam a s, à parte ſuperiori a, producatur ab inferiori s, ponamus in n, poſtea à puncto a, ducatur a t, dextra, quæ cum a s, faciat angulum t a s, dextrum æqualem interno dextro r s n, Vel ducatur a u, ſiniſtra, quæ cum a s, faciat angulum u a s, ſiniſtrũ æqualem interno ſiniſtro c s n; quod ob eãdem cauſam ſupradictam recta a t, ſeu dicamus u t, erit æquidiſtans propoſitæ c r. Nec dubitandum eſt quod duæ rectæ u a, & a t, non ſint ſimul coniunctæ indirectum conſtituendo vnam rectam u t, ſcilicet, quod u a, producta verſus a, non vniatur cum recta a t, vel quod t a, producta verſus a, non vniatur cum recta a u; quoniam cum angulus x a t, ſit æqualis angulo a s r, & angulus x a u, æqualis angulo a s c, etiam ſumma duorum angulorum x a t, & x a u, erit æqualis ſummæ duorum



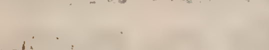












a s r, &

asr, & asc, ſed hæc eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) & ideo illa ſumma etiam erit æqualis duobus rectis, & propterea (per 14. primi) duæ rectæ at, & au, ſunt ſimul coniunctæ in directum. Idem occurrit in alijs modis ſuperioribus operandi, quod in quocunq; illorũ ſumma angulorum tas, & uas, eſt ęqualis duobus rectis.

LAVS DEO SEMPER.



